

Respostas - 6ª Lista de Exercícios
Cálculo Diferencial e Integra II - Curso: Engenharia Civil
Profª Liliam Carsava Merighe

Integrais Duplas

Exercício 1 *a)* $\int_1^4 \int_0^2 (6x^2 - 2x) \, dydx = 222.$

b) $\int_0^2 \int_0^{\pi/2} x \operatorname{sen} y \, dydx = 2.$

c) $\int_{-3}^3 \int_0^{\pi/2} (y + y^2 \cos x) \, dx dy = 18.$

d) $\int_0^1 \int_1^2 \frac{xe^x}{y} \, dydx = \ln 2.$

Dica: durante a resolução, use integração por partes ($u = x, dv = e^x dx$) para resolver $\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x$

e) $\int_1^4 \int_1^2 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) \, dydx = \frac{21}{2} \ln 2.$

f) $\int_0^1 \int_0^1 v(u + v^2)^4 \, dudv = \frac{31}{30}.$

Dica: pode ser útil usar a substituição $w = 1 + v^2, dw = 2v dv$.

g) $\int_0^2 \int_0^{\pi} r \operatorname{sen}^2 \theta \, d\theta dr = \pi.$

Dica: use a identidade $\operatorname{sen}^2 \theta = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}.$

h) $\int_0^1 \int_0^1 \sqrt{s+t} \, ds dt = \frac{8}{15}(2\sqrt{2} - 1).$

Exercício 2 *a)* $\iint_R \operatorname{sen}(x+y) \, dA = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(x+y) \, dx dy = 2.$

b) $\iint_R \frac{xy^2}{x^2+1} \, dA = \int_0^1 \int_{-3}^3 \frac{x}{x^2+1} y^2 \, dydx = 9 \ln 2.$

c) $\iint_R ye^{-xy} \, dA = \int_0^3 \int_0^2 ye^{-xy} \, dx dy = \frac{5}{2} + \frac{1}{2e^6}.$

d) $\iint_R \frac{1}{1+x+y} \, dA = \int_1^2 \int_1^3 \frac{1}{1+x+y} \, dx dy = 6 \ln 6 - 5 \ln 5 - 4 \ln 4 + 3 \ln 3.$

Dica: Usando integração por partes $\int \ln u \, du = u \ln u - u.$

Exercício 3 $V = 51.$

Exercício 4 $V = \frac{166}{27}.$

Exercício 5 $V = \frac{640}{3}.$

Exercício 6 a) $\int_0^1 \int_{x^2}^x (1+2y) \, dydx = \frac{3}{10}.$

b) $\int_0^1 \int_0^{s^2} \cos(s^3) \, dt ds = \frac{\text{sen}1}{3}.$

Dica: faça a substituição $u = s^3$, $du = 3s^2 ds$.

Exercício 7 a) $\iint_D y^2 \, dA = \int_{-1}^1 \int_{-y-2}^y y^2 \, dx dy = \frac{4}{3}.$

b) $\iint_D x \, dA = \int_0^\pi \int_0^{\text{sen}x} x \, dy dx = \pi.$

Dica: use integração por partes $u = x$, $dv = \text{sen}x dx$.

c) $\iint_D (x^2 + 2y) \, dA = \int_0^1 \int_{x^3}^x (x^2 + 2y) \, dy dx = \frac{23}{84}.$

d) $\iint_D y^2 \, dA = \int_1^2 \int_{y-1}^{7-3y} y^2 \, dx dy = \frac{11}{3}.$

Exercício 8 Ordem $dydx$:

$$\iint_D y \, dA = \int_0^1 \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} y \, dy dx + \int_1^4 \int_{x-2}^{\sqrt{x}} y \, dy dx$$

Ordem $dx dy$:

$$\iint_D y \, dA = \int_{-1}^2 \int_{y^2}^{y+2} y \, dx dy$$

Calculando a integral mais fácil: $\int_{-1}^2 \int_{y^2}^{y+2} y \, dx dy = \frac{9}{4}.$

Exercício 9 $V = \frac{19}{210}$

Exercício 10 $V = \frac{5}{6}.$

Exercício 11 a) A região é $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 4\}$. É a região no primeiro quadrante entre a parábola $y = x^2$ e a reta $y = 4$. Para inverter a ordem, fixamos y : $0 \leq y \leq 4$. Então, x varia de 0 até a parábola $x = \sqrt{y}$.

$$\int_0^4 \int_0^{\sqrt{y}} f(x, y) \, dx dy$$

b) A região é $D = \{(x, y) \mid -2 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq \sqrt{4-y^2}\}$. A curva $x = \sqrt{4-y^2}$ é a metade direita do círculo $x^2 + y^2 = 4$. A região é o semicírculo direito com raio 2, centrado na origem. Para inverter a ordem, fixamos x : $0 \leq x \leq 2$. Então, y varia de $-\sqrt{4-x^2}$ até $\sqrt{4-x^2}$.

$$\int_0^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) \, dy dx$$

c) A região é $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \ln x\}$. É a região entre o eixo x e a curva $y = \ln x$, de $x = 1$ até $x = 2$. Para inverter a ordem, fixamos y : y varia de $\ln 1 = 0$ até $\ln 2$. A curva $y = \ln x$ é $x = e^y$. Então, x varia de e^y até 2 .

$$\int_0^{\ln 2} \int_{e^y}^2 f(x, y) \, dx dy$$

Exercício 12 a) $\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2} \, dx dy = \int_0^3 \int_0^{x/3} e^{x^2} \, dy dx = \frac{1}{6}(e^9 - 1).$

b) $\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{1}{y^3 + 1} \, dx dy = \int_0^2 \int_0^{y^2} \frac{1}{y^3 + 1} \, dy dx = \frac{1}{3} \ln 9.$

Exercício 13 A primeira integral é sobre a região $D_1 = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 2y\}$. É um triângulo com vértices $(0, 0), (2, 1), (0, 1)$. A fronteira direita é a reta $x = 2y$ (ou $y = x/2$).

A segunda integral é sobre a região $D_2 = \{(x, y) \mid 1 \leq y \leq 3, 0 \leq x \leq 3 - y\}$. É um triângulo com vértices $(0, 1), (2, 1), (0, 3)$. A fronteira direita é a reta $x = 3 - y$ (ou $y = 3 - x$).

A região total $D = D_1 \cup D_2$ é um triângulo com vértices $(0, 0), (2, 1), (0, 3)$.

A integral com a ordem invertida é:

$$\int_0^2 \int_{x/2}^{3-x} f(x, y) \, dy dx$$

Exercício 14 a) Em coordenadas polares, D é descrita por $0 \leq r \leq 5, 0 \leq \theta \leq \pi$.

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, dA = r dr d\theta.$$

$$\iint_D x^2 y \, dA = \int_0^\pi \int_0^5 (r \cos \theta)^2 (r \sin \theta) \cdot r \, dr d\theta = \frac{1250}{3}.$$

b) A região R é descrita por $0 \leq r \leq 2$ e $\pi/4 \leq \theta \leq \pi/2$.

$$\iint_R (2x - y) \, dA = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^2 (2r \cos \theta - r \sin \theta) r \, dr d\theta = \frac{16 - 12\sqrt{2}}{3}.$$

c) A região R é descrita por $1 \leq r \leq 3$ e $0 \leq \theta \leq \pi/2$.

$$\iint_R \sin(x^2 + y^2) \, dA = \int_0^{\pi/2} \int_1^3 \sin(r^2) \cdot r \, dr d\theta = \frac{\pi}{4}(\cos 1 - \cos 9).$$

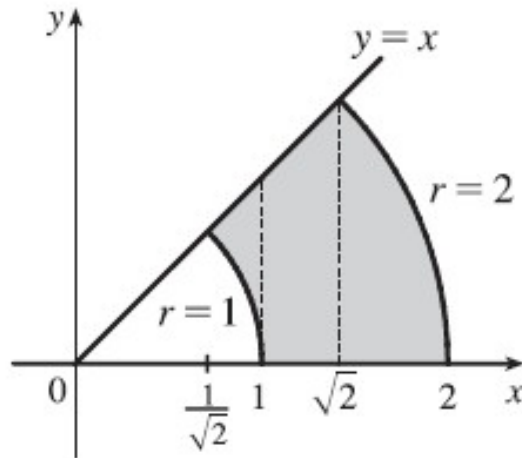
Exercício 15 $V = \frac{4\pi}{3}$

Exercício 16 $V = 32\pi\sqrt{3}.$

Exercício 17 $\int_{1/\sqrt{2}}^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^x xy \, dy dx + \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^x xy \, dy dx + \int_{\sqrt{2}}^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} xy \, dy dx = \int_0^{\pi/4} \int_1^2 r^3 \cos \theta \sin \theta \, dr d\theta =$

$$\frac{15}{16}$$

Dica: use a figura a seguir:



Exercício 18 a) Massa: $m = \int_1^3 \int_1^4 ky^2 \, dydx = 42k$.

Centro de massa $(\bar{x}, \bar{y})$:

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \int_1^3 \int_1^4 x(ky^2) \, dydx = 2.$$

$$\bar{y} = \frac{1}{m} \int_1^3 \int_1^4 y(ky^2) \, dydx = \frac{85}{28}.$$

Centro de massa: $\left(2, \frac{85}{28}\right)$.

b) Massa: $m = \int_{-1}^1 \int_0^{1-x^2} ky \, dydx = \frac{8}{15}k$.

Centro de massa: Por simetria da região e da densidade em relação ao eixo y , $\bar{x} = 0$.

$$\bar{y} = \frac{1}{m} \int_{-1}^1 \int_0^{1-x^2} y(ky) \, dydx = \frac{4}{7}.$$

Centro de massa: $\left(0, \frac{4}{7}\right)$.

Exercício 19 A região é $D = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi/2\}$.

A densidade é $\rho(x, y) = ky = kr \sin \theta$.

$$\text{Massa: } m = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 (kr \sin \theta) r \, drd\theta = \frac{k}{3}.$$

Centro de massa: $\left(\frac{3}{8}, \frac{3\pi}{16}\right)$.

Exercício 20 a) $A = 15\sqrt{26}$

b) $A = 3\sqrt{14}$.

c) $A = \frac{\pi}{6}(17\sqrt{17} - 1)$. Dica: use coordenadas polares.