

Respostas - 4ª Lista de Exercícios
Cálculo Diferencial e Integral II - Curso: Engenharia Civil
 Prof^a Liliam Carsava Merighe

Funções de várias variáveis reais a valores reais - Parte 2

Exercício 1 *a)* $\frac{dz}{dt} = (2x + y) \cos t + (2y + x) e^t$

b) $\frac{dz}{dt} = \left(\frac{4}{t^2} - 20t^3 \right) \sin(x + 4y).$

c) $\frac{dw}{dt} = e^{y/z} \left(2t - \frac{x}{z} - \frac{2xy}{z^2} \right).$

Exercício 2 $\frac{\partial z}{\partial s} = 2xy^3 \cos t + 3x^2y^2 \sin t$

$\frac{\partial z}{\partial t} = -2sxy^3 \sin t + 3sx^2y^2 \cos t$

Exercício 3 *a)* $\frac{\partial z}{\partial u} = 85, \frac{\partial z}{\partial v} = 178, \frac{\partial z}{\partial w} = 54.$

b) $\frac{\partial w}{\partial r} = 2\pi, \frac{\partial w}{\partial \theta} = -2\pi.$

Exercício 4 $\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y \sin x}{\cos x - 2y}$

Exercício 5 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{3z} \quad e \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y}{3z}$

Exercício 6 *Dica: Queremos calcular $\frac{dT}{dt}$ em $t = 3$.*

$\frac{dT}{dt} = 2$, logo a temperatura aumenta a uma taxa de 2 °C/s.

Exercício 7 $\frac{dV}{dt} = 127000\pi$, logo a taxa de variação do volume é de $127000\pi \text{ cm}^3/\text{s}$.

Exercício 8 $\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \theta$

$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x} (-r \sin \theta) + \frac{\partial z}{\partial y} (r \cos \theta)$

$\frac{\partial^2 z}{\partial r \partial \theta} = -\frac{\partial z}{\partial x} \sin \theta + \frac{\partial z}{\partial y} \cos \theta - r \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + r(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + r \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

Exercício 9 *a)* O vetor de direção unitário é $\vec{u} = \langle \cos(\pi/6), \sin(\pi/6) \rangle = \langle \sqrt{3}/2, 1/2 \rangle$. $E \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1) =$

$\frac{1 - \sqrt{3}}{2}$

b) O vetor de direção unitário é $\vec{u} = \langle \cos(2\pi/3), \sin(2\pi/3) \rangle = \langle -1/2, \sqrt{3}/2 \rangle$. $E \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, 4) = \frac{4 + \sqrt{3}}{2}$

Exercício 10 a) (i) $\nabla f(x, y) = \langle 2 \cos(2x + 3y), 3 \cos(2x + 3y) \rangle$.

(ii) $\nabla f(-6, 4) = \langle 2, 3 \rangle$.

(iii) $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(-6, 4) = \sqrt{3} - \frac{3}{2}$

b) (i) $\nabla f(x, y, z) = \langle e^{2yz}, 2xze^{2yz}, 2xye^{2yz} \rangle$.

(ii) $\nabla f(3, 0, 2) = \langle 1, 12, 0 \rangle$.

(iii) $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(3, 0, 2) = -\frac{22}{3}$

Exercício 11 a) O vetor unitário é $\vec{u} = \langle -3/5, 4/5 \rangle$. E $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, \pi/3) = \frac{4 - 3\sqrt{3}}{10}$.

b) O vetor unitário é $\vec{u} = \langle 1/\sqrt{10}, 3/\sqrt{10} \rangle$. E $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(2, 1) = -\frac{4\sqrt{10}}{5}$.

c) O vetor unitário é $\vec{u} = \langle -1/3, -2/3, 2/3 \rangle$. E $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(3, 2, 6) = -1$.

Exercício 12 a) A taxa máxima ocorre na direção do gradiente, e seu valor é a norma do gradiente.

$$\nabla f(4, 1) = \langle 1, 8 \rangle.$$

$$\|\langle 1, 8 \rangle\| = \sqrt{65}.$$

b) $\nabla f(3, 6, -2) = \langle 3/7, 6/7, -2/7 \rangle$.

$$\|\nabla f\| = 1.$$

Exercício 13 (a) A direção é $\vec{v} = \langle 1, 1, -1 \rangle$. Normalizando, $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}\langle 1, 1, -1 \rangle$.

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(P) = \frac{32\sqrt{3}}{3}.$$

(b) A direção de variação mais rápida é a do gradiente: $\langle 38, 6, 12 \rangle$.

(c) A taxa máxima é a norma do gradiente: $\|\langle 38, 6, 12 \rangle\| = 2\sqrt{406}$.

Exercício 14 Dica: O vetor normal à superfície é paralelo ao gradiente de F , onde F é a equação da superfície. $\vec{n} = \nabla F(3, 3, 5) = \langle 4, 4, 4 \rangle$. Podemos usar o vetor paralelo $\vec{n} = \langle 1, 1, 1 \rangle$.

Plano Tangente: $x + y + z = 11$

Reta Normal: A reta passa por $(3, 3, 5)$ com a direção de $\vec{n} = \langle 1, 1, 1 \rangle$. As equações paramétricas são:

$$x = 3 + t, \quad y = 3 + t, \quad z = 5 + t$$