# Funções Vetoriais

## 1. Funções vetoriais e curvas espaciais

**Definição:** Uma **função vetorial**, ou função a valores vetoriais, é uma função cujo domínio é um conjunto de números reais e cuja imagem é um conjunto de vetores.

$$\begin{aligned} \vec{F} : A \subseteq \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^n, \qquad n \in \mathbb{N} \\ t &\longmapsto (F_1(t), \dots, F_n(t)) \end{aligned}$$

$F_1, \dots, F_n$ são funções a valores reais ($F_i : A \to \mathbb{R}$), chamadas de **funções componentes** de $\vec{F}$.

Para $n = 3$, é comum escrever:

$$\vec{F}(t) = (F_1(t), F_2(t), F_3(t)) = F_1(t)\vec{i} + F_2(t)\vec{j} + F_3(t)\vec{k}$$

ou ainda

$$\vec{F}(t) = (f(t), g(t), h(t)) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}$$

**Exemplo:** Se

$$\vec{F}(t) = \left(t^3, \ln(3-t), \sqrt{t}\right)$$

então as funções componentes são:

$$F_1(t) = t^3, \quad F_2(t) = \ln(3-t), \quad F_3(t) = \sqrt{t}$$

O **domínio** de $\vec{F}$ é constituído por todos os valores de $t$ para os quais a expressão $\vec{F}(t)$ está definida, isto é, quando:

$$\underbrace{3 - t > 0}_{\text{condição do } \ln} \qquad \text{e} \qquad \underbrace{t \geqslant 0}_{\text{condição da } \sqrt{t}}$$

Portanto, o domínio de $\vec{F}$ é o intervalo $[0, 3)$.

## Limites e Continuidade

**Definição:**

**1.** Se $\vec{F}(t) = (F_1(t), F_2(t), \dots, F_n(t))$, então:

$$\lim_{t \to a} \vec{F}(t) = \left(\lim_{t \to a} F_1(t), \lim_{t \to a} F_2(t), \dots, \lim_{t \to a} F_n(t)\right)$$

desde que os limites das funções componentes existam.

**2.** Uma função vetorial $\vec{F}$ é **contínua** em $a$ se:

$$\lim_{t \to a} \vec{F}(t) = \vec{F}(a).$$

**Observações:**

**1.** Os limites de funções vetoriais obedecem às mesmas regras que os limites de funções reais.

**2.** Em vista da Definição 1, temos que $\vec{F}$ é contínua em $a$ se, e somente se, suas funções componentes são contínuas em $a$.

**Exemplo:** Seja $\vec{F}(t) = \left(1 + t^3\right)\vec{i} + te^{-t}\vec{j} + \frac{\operatorname{sen} t}{t}\vec{k}$. Determine $\lim\limits_{t\to 0} \vec{F}(t)$.

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} \vec{F}(t) &= \left[\lim_{t\to 0}\left(1+t^3\right)\right]\vec{i} + \left[\lim_{t\to 0} te^{-t}\right]\vec{j} + \left[\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right]\vec{k} \\ &= (1)\vec{i} + (0)\vec{j} + (1)\vec{k} = \vec{i} + \vec{k} = (1,0,1).\end{aligned}$$

## Curvas no Espaço

Suponha que $f, g$ e $h$ sejam funções reais contínuas em um intervalo $I$. O conjunto $C$ de todos os pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ onde

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t), \quad t \in I \tag{*}$$

é chamado de **curva espacial**. As equações em (*) são denominadas **equações paramétricas** de $C$ e $t$ é conhecido como o **parâmetro**.

Uma curva espacial, como a descrita acima, também pode ser definida como uma função vetorial:

$$\begin{aligned}\vec{F} : I &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto \vec{F}(t) = (f(t), g(t), h(t))\end{aligned}$$

**Obs:** Curvas planas também podem ser representadas usando notação vetorial (em $\mathbb{R}^2$).
**Exemplos:**

**1)** Descreva a curva definida pela função vetorial:

$$\vec{F}(t) = (1+t, 2+5t, -1+6t).$$

**Solução:**
Temos

$$(1+t, 2+5t, -1+6t) = (1,2,-1) + t(1,5,6), \quad t \in \mathbb{R}$$

que é a equação de uma reta passando pelo ponto $(1, 2, -1)$ e paralela ao vetor $(1, 5, 6)$.

**2)** Esboce a curva cuja equação vetorial é dada por

$$\vec{F}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t).$$

**Solução:**

As equações paramétricas para essa curva são:

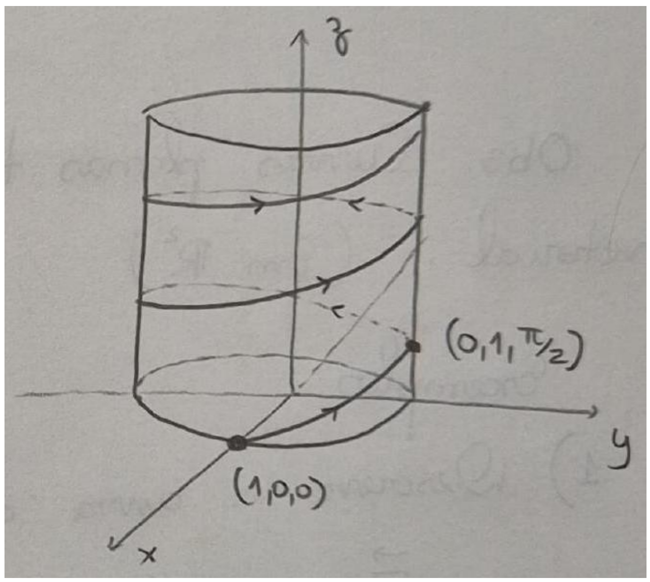
$$x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t, \quad z = t.$$

Uma vez que

$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

a curva deve situar-se no cilindro circular $x^2 + y^2 = 1$. O ponto $(x, y, z)$ está diretamente acima do ponto $(x, y, 0)$, que se move no sentido anti-horário em torno da circunferência $x^2 + y^2 = 1$ no plano $xy$.

Como $z = t$, a curva sobe (gira para cima) ao redor do cilindro quando $t$ aumenta. Essa curva é chamada de **hélice**.




**3)** Determine uma equação vetorial que represente a curva $C$ obtida pela intersecção do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ com o plano $y + z = 2$.

A projeção de $C$ no plano $xy$ é o círculo $x^2 + y^2 = 1, z = 0$. Então, podemos escrever

$$x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Da equação do plano, temos

$$z = 2 - y = 2 - \operatorname{sen} t.$$

Logo, podemos escrever as equações paramétricas de $C$ como

$$x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t, \quad z = 2 - \operatorname{sen} t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

A equação vetorial correspondente é

$$\vec{F}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 2 - \operatorname{sen} t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Essa equação é chamada de **parametrização** da curva $C$.

## 2. Derivadas e Integrais de Funções Vetoriais

### Derivadas

**Definição:** Seja $\vec{F} : A \to \mathbb{R}^n$. uma função vetorial. A **derivada** de $\vec{F}$ é dada por:

$$\vec{F}'(t) = \frac{d\vec{F}}{dt} = \lim_{h\to 0} \frac{\vec{F}(t+h) - \vec{F}(t)}{h}$$

se o limite existir.

Se o ponto $P$ (em $\mathbb{R}^3$) tem posição $\vec{F}(t_0)$, o vetor $\vec{F}'(t_0)$ é chamado de **vetor tangente** à curva definida por $\vec{F}$ no ponto $P$, desde que $\vec{F}'(t_0)$ exista e $\vec{r}'(t_0) \neq \vec{0}$. A **reta tangente** à curva em $P$ é definida como a reta que passa por $P$ e é paralela ao vetor $\vec{F}'(t_0)$. Além disso, o **vetor tangente unitário** é dado por

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{F}'(t)}{\left\|\vec{F}'(t)\right\|}$$

**Teorema:** Se $\vec{F}(t) = (F_1(t), F_2(t), \ldots, F_n(t))$, onde as $F_i$ são funções diferenciáveis para $i = 1, \ldots, n$, então

$$\vec{F}'(t) = (F_1'(t), F_2'(t), \ldots, F_n'(t))$$

**Exemplos:**

**1)** **a)** Determine a derivada de $\vec{F}(t) = \big(1+t^3, te^{-t}, \text{sen}(2t)\big)$.

**b)** Encontre o vetor tangente unitário no ponto onde $t = 0$.

**Solução:**

**a)** Temos:

- $\big(1+t^3\big)' = 3t^2$
- $\big(te^{-t}\big)' = 1 \cdot e^{-t} + t \cdot (-e^{-t}) = (1-t)e^{-t}$
- $(\text{sen}(2t))' = 2\cos(2t)$

Logo,

$$\vec{F}'(t) = \big(3t^2, (1-t)e^{-t}, 2\cos(2t)\big)$$

**b)** Em $t = 0$, temos $\vec{F}(0) = (1, 0, 0)$ e $\vec{F}'(0) = (0, 1, 2)$. Assim, o vetor tangente unitário no ponto $(1, 0, 0)$ é:

$$\vec{T}(0) = \frac{\vec{F}'(0)}{\left\|\vec{F}'(0)\right\|} = \frac{(0,1,2)}{\sqrt{0^2+1^2+2^2}} = \frac{(0,1,2)}{\sqrt{5}} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

**2)** Determine as equações paramétricas para a reta tangente à hélice com equações paramétricas

$$x = 2\cos t, \quad y = \text{sen}\, t, \quad z = t$$

no ponto $\left(0, 1, \frac{\pi}{2}\right)$.

**Solução:**

A equação vetorial da hélice é

$$\vec{F}(t) = (2\cos t, \operatorname{sen} t, t)$$

de modo que

$$\vec{F}'(t) = (-2\operatorname{sen} t, \cos t, 1)$$

O valor do parâmetro correspondente ao ponto $\left(0, 1, \frac{\pi}{2}\right)$ é $t = \frac{\pi}{2}$, e o vetor tangente nesse ponto é $\vec{F}'(\pi/2) = (-2, 0, 1)$.

A equação da reta tangente à curva em $\left(0, 1, \frac{\pi}{2}\right)$ é:

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= \vec{F}(\pi/2) + \lambda \cdot \vec{F}'(\pi/2)\\ &= (0, 1, \pi/2) + \lambda(-2, 0, 1)\\ &= \left(-2\lambda, 1, \frac{\pi}{2} + \lambda\right)\end{aligned}$$

ou seja, suas equações paramétricas são

$$x = -2\lambda, \quad y = 1, \quad z = \frac{\pi}{2} + \lambda$$

**Teorema (Regras de Derivação):** Sejam $\vec{F}$ e $\vec{G}$ funções vetoriais diferenciáveis, $c$ um escalar e $f$ uma função real diferenciável. Então:

**1.** $\dfrac{d}{dt}[\vec{F}(t) + \vec{G}(t)] = \vec{F}'(t) + \vec{G}'(t)$

**2.** $\dfrac{d}{dt}[c\vec{F}(t)] = c\vec{F}'(t)$

**3.** $\dfrac{d}{dt}[f(t)\vec{F}(t)] = f'(t)\vec{F}(t) + f(t)\vec{F}'(t)$

**4.** $\dfrac{d}{dt}[\vec{F}(t) \cdot \vec{G}(t)] = \vec{F}'(t) \cdot \vec{G}(t) + \vec{F}(t) \cdot \vec{G}'(t)$ (Produto escalar)

**5.** $\dfrac{d}{dt}[\vec{F}(t) \times \vec{G}(t)] = \vec{F}'(t) \times \vec{G}(t) + \vec{F}(t) \times \vec{G}'(t)$ (Produto vetorial)

**6.** $\dfrac{d}{dt}[\vec{F}(f(t))] = f'(t)\vec{F}'(f(t))$ (Regra da Cadeia)

**Exemplo:** Mostre que, se $\|\vec{F}(t)\| = c$ (uma constante), então $\vec{F}'(t)$ é ortogonal a $\vec{F}(t)$ para todo $t$.

**Solução:**

Para isso, vamos mostrar que

$$\vec{F}'(t) \cdot \vec{F}(t) = 0.$$

Uma vez que
$$\vec{F}(t)\cdot\vec{F}(t) = \|\vec{F}(t)\|^2 = c^2$$
derivando de ambos os lados, temos
$$\begin{aligned}
0 = \frac{d}{dt}[\vec{F}(t)\cdot\vec{F}(t)] &\overset{(4)}{=} \vec{F}'(t)\cdot\vec{F}(t) + \vec{F}(t)\cdot\vec{F}'(t)\\
&= 2\cdot\vec{F}'(t)\cdot\vec{F}(t)\\
\Rightarrow \vec{F}'(t)\cdot\vec{F}(t) = 0 &
\end{aligned}$$
Geometricamente (em $\mathbb{R}^3$): se a curva está sobre uma esfera com centro na origem e raio $c$, então o vetor tangente $\vec{F}'(t)$ é sempre perpendicular ao vetor posição $\vec{F}(t)$.

## Integrais

**Teorema:** Seja $\vec{F}(t) = (F_1(t), F_2(t), \ldots, F_n(t))$, então
$$\int_a^b \vec{F}(t)dt = \left(\int_a^b F_1(t)dt, \int_a^b F_2(t)dt, \ldots, \int_a^b F_n(t)dt\right)$$
Além disso, se $\vec{G}$ é uma primitiva de $\vec{F}$ (isto é, $\vec{G}'(t) = \vec{F}(t)$), teremos
$$\int_a^b \vec{F}(t)dt = [\vec{G}(t)]_a^b = \vec{G}(b) - \vec{G}(a)$$
**Observação:** o mesmo vale para integrais indefinidas.
**Exemplo:** Se $\vec{F}(t) = (2\cos t, \operatorname{sen} t, 2t)$, então
$$\int \vec{F}(t)dt = \left(\int 2\cos t dt, \int \operatorname{sen} t dt, \int 2t dt\right) = \left(2\operatorname{sen} t, -\cos t, t^2\right) + \vec{C}$$
onde $\vec{C}$ é um vetor constante de integração $\left(\vec{C} = (c_1, c_2, c_3)\right)$, e
$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \vec{F}(t)dt &= \left[\left(2\operatorname{sen} t, -\cos t, t^2\right)\right]_0^{\pi/2}\\
&= (2\operatorname{sen}(\pi/2) - 2\operatorname{sen}(0), -\cos(\pi/2) - (-\cos(0)), (\pi/2)^2 - 0^2)\\
&= \left(2, 1, \frac{\pi^2}{4}\right)
\end{aligned}$$

## 3. Comprimento de Curva/Arco

Já vimos o comprimento de arco em $\mathbb{R}^2$ no capítulo anterior. Aqui, vamos generalizar para $\mathbb{R}^n$.
**Definição:** Seja $I$ um intervalo em $\mathbb{R}$. Uma **curva** $\gamma$ em $\mathbb{R}^n$, definida em $I$, é uma função $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$.

**Definição:** Seja $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ uma curva com derivada contínua em $[a,b]$, percorrida exatamente uma vez à medida que $t$ cresce. Definimos o **comprimento** $L(\gamma)$ da curva $\gamma$ por

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt.$$

**Exemplo:** Calcule o comprimento do arco da hélice circular de equação $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$ do ponto $(1,0,0)$ até o ponto $(1,0,2\pi)$.

**Solução:**

Temos

$$\gamma'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 1)$$

e

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(-\operatorname{sen} t)^2 + (\cos t)^2 + 1^2} = \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

O arco do ponto $(1,0,0)$ a $(1,0,2\pi)$ é descrito quando o parâmetro $t$ percorre o intervalo $0 \leq t \leq 2\pi$. Logo,

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\| \, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} dt = [\sqrt{2}t]_0^{2\pi} = 2\sqrt{2}\pi$$

**Observação:** Uma mesma curva pode ter mais de uma parametrização, porém o comprimento não muda, independentemente da parametrização que é usada.