3ª Lista de Exercícios Cálculo Diferencial e Integra II
Sistemas de Informação
Profª Liliam Carsava Merighe

Exercício 1 *Verifique se* $y = x - x^{-1}$ *é uma solução da equação diferencial* $xy' + y = 2x$.

Exercício 2 *Quais das seguintes funções são soluções da equação diferencial* $y'' + y = \operatorname{sen} x$?

a) $y = \operatorname{sen} x$

b) $y = \cos x$

c) $y = \frac{1}{2} x \operatorname{sen} x$

d) $y = -\frac{1}{2} x \cos x$

Exercício 3 *Esboce o campo de direções da equação diferencial* $y' = y - 2x$. *Use-o para esboçar a curva solução que passa pelo ponto* $(1, 0)$.

Exercício 4 *Use o método de Euler com passo* $0,5$ *para calcular os valores aproximados de y,* y_1, y_2, y_3 *e* y_4 *da solução do problema de valor inicial*

$$y' = y - 2x, \qquad y(1) = 0.$$

Exercício 5 *A Lei de Resfriamento de Newton afirma que a taxa de resfriamento de um objeto é proporcional à diferença de temperatura entre o objeto e sua vizinhança, desde que essa diferença não seja muito grande.*

a) *Suponha que você tenha acabado de servir uma xícara de café recém-coado com uma temperatura de 95ºC em uma sala onde a temperatura é de 20ºC. Escreva uma equação diferencial para expressar a Lei de Resfriamento de Newton nessa situação particular. Qual a condição inicial?*

b) *Suponha que o café esfrie a uma taxa de 1ºC por minuto quando sua temperatura for 70ºC. Como fica a equação diferencial nesse caso? Se possível., resolva-a para encontrar uma expressão para a temperatura do café no instante t.*

c) *Desenhe um campo de direções e use-o para esboçar a curva solução para o problema de valor inicial. Qual é o valor-limite da temperatura?*

d) *Use o método de Euler com passo* $h = 2$ *minutos para estimar a temperatura do café após 10 minutos.*

Exercício 6 *Resolva as equações diferenciais e os problemas de valor inicial dados abaixo:*

a) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$

b) $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x}}{e^y}$

c) $(y + \operatorname{sen} y)y' = x + x^3$

d) $\frac{dp}{dt} = t^2 p - p + t^2 - 1$

e) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y}, \qquad y(0) = -3$

f) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\ln x}{xy}, \qquad y(1) = 2$

Exercício 7 *Uma solução de glicose é administrada de maneira intravenosa na corrente sanguínea em uma taxa constante r. À medida que a glicose é adicionada, ela é convertida em outras substâncias e removida da corrente sanguínea a uma taxa que é proporcional à concentração naquele instante. Então, um modelo para a concentração $C = C(t)$ da solução de glicose na corrente sanguínea é*

$$\frac{dC}{dt} = r - kC$$

onde k é uma constante positiva.

Suponha que a concentração no instante $t = 0$ seja C_0. Determine a concentração em um instante qualquer t, resolvendo a equação diferencial.

Exercício 8 *Um tanque contém $1000L$ de água salgada com $15kg$ de sal dissolvido. Água pura entra no tanque a uma taxa de $10L/min$. A solução é mantida bem misturada e escoa do tanque na mesma taxa. Quanto sal há no tanque **(a)** após t minutos e **(b)** após 20 minutos?*

Exercício 9 *Um barril com $2000L$ de cerveja contém 4% de álcool (por volume). Cerveja com 6% de álcool é bombeada para dentro do barril a uma taxa de $20L/min$ e a mistura é bombeada para fora do barril à mesma taxa. Qual é a porcentagem de álcool depois de uma hora?*

Exercício 10 *O cardume de atum do Pacífico foi modelado pela equação diferencial*

$$\frac{dy}{dt} = ky\left(1 - \frac{y}{M}\right)$$

onde $y(t)$ é a biomassa (massa total dos membros da população) em quilogramas no instante t (medido em anos), a capacidade de suporte é estimada como $M = 8 \cdot 10^7 kg$ e $k = 0,71$ por ano.

a) *Se $y(0) = 2 \cdot 10^7$ kg, calcule a biomassa um ano depois.*

b) *Quanto tempo levará para a biomassa alcançar $4 \cdot 10^7 kg$?*

Exercício 11 *Um modelo para a propagação de um boato é que a taxa de propagação é proporcional ao produto da fração y da população que ouviu o boato pela fração que não ouviu o boato.*

a) *Escreva uma equação diferencial que seja satisfeita por y.*

b) *Resolva a equação diferencial.*

c) *Uma cidade pequena tem 1.000 habitantes. Às 8 horas, 80 pessoas tinham ouvido o boato. Ao meio-dia, metade da cidade tinha ouvido o boato. A que horas 90% da população terá ouvido o boato?*

Exercício 12 *Resolva as equações diferenciais e os problemas de valor inicial dados abaixo:*

a) $xy' - 2y = x^2$

b) $y' = x - y$

c) $xy' + y = \sqrt{x}$

d) $(1+t)\dfrac{du}{dt} + u = 1 + t, \qquad t > 0$

e) $x^2y' + 2xy = \ln x, \qquad y(1) = 2$

f) $t^3\dfrac{dy}{dt} + 3t^2y = \cos t, \qquad y(\pi) = 0$

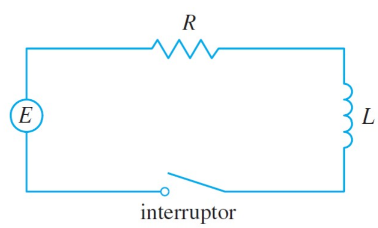
g) $t\dfrac{du}{dt} = t^2 + 3u, \qquad t > 0, \qquad u(2) = 4$

h) $xy' = y + x^2\,\mathrm{sen}x, \qquad y(\pi) = 0$

Exercício 13 *No circuito apresentado na figura a seguir, uma pilha fornece uma voltagem constante de* $40\,V$*, a indutância é* $2H$*, a resistência é* 10Ω *e* $I(0) = 0$*.*

a) *Encontre* $I(t)$*.*

b) *Calcule a corrente depois de* $0,1s$*.*



Exercício 14 *Anteriormente, analisamos os problemas de misturas nos quais o volume de fluido permanecia constante e vimos que estes fornecem equações separáveis.*

Porém, se as taxas de entrada e de saída do sistema forem diferentes, então o volume não é constante e a equação diferencial resultante é linear, mas não separável.

Um tanque contém $100L$ *de água. Uma solução com uma concentração salina de* $0,4kg/L$ *é adicionada à taxa de* $5L/min$*. A solução é mantida misturada e é retirada do tanque na taxa de* $3L/min$*. Se* $y(t)$ *é a quantidade de sal (quilogramas) após* t *minutos, mostre que* y *satisfaz a equação diferencial*

$$\frac{dy}{dt} = 2 - \frac{3y}{100 + 2t}.$$

Resolva essa equação e calcule a concentração depois de 20 *minutos.*