Funções de Várias Variáveis Reais a Valores Reais

5. Regra da Cadeia

$\rightarrow$ Lembre-se: Em Cálculo 1, vimos a Regra da Cadeia para derivar uma função composta. Se $y = f(x)$ e $x = g(t)$, então

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}.$$

Para funções de várias variáveis, veremos várias versões da Regra da Cadeia.

- **Regra da Cadeia (Caso 1):** Suponha que $z = f(x, y)$ seja uma função diferenciável de x e y, onde $x = g(t)$ e $y = h(t)$ são funções diferenciáveis de t. Então z é uma função diferenciável de t e

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$
$$\left(\text{ou } \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \right)$$

Exemplos:

1) Se $z = x^2y + 3xy^4$, onde $x = \operatorname{sen}(2t)$ e $y = \cos t$, determine $\frac{dz}{dt}$ quando $t = 0$.

Solução:

Pela Regra da Cadeia,

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \\ &= \left(2xy + 3y^4\right)(2\cos(2t)) + \left(x^2 + 12xy^3\right)(-\operatorname{sen} t) \end{aligned}$$

Quando $t = 0$, temos

$$x = \operatorname{sen} 0 = 0 \quad \text{e} \quad y = \cos 0 = 1.$$

Logo,

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=0} = \left(2 \cdot 0 \cdot 1 + 3 \cdot 1^4\right) \cdot (2\cos 0) + \left(0^2 + 12 \cdot 0 \cdot 1^3\right)(-\operatorname{sen} 0) = 6$$

Interpretação: $\frac{dz}{dt}$ é a taxa de variação de z com relação a t quando o ponto (x, y) se move ao longo da curva C com equações paramétricas $x = \operatorname{sen}(2t), y = \cos t$.

2) Seja $z = f(e^{-u}, u^2)$, onde $f(x,y)$ é uma função diferenciável. Expresse $\dfrac{dz}{du}$ em termos das derivadas parciais de f.

Solução:

Temos $z = f(x,y)$, onde $x = e^{-u}$ e $y = u^2$. Pela Regra da Cadeia,

$$\frac{dz}{du} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{du} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{du}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{du} = -e^{-u} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 2u\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

onde $x = e^{-u}$ e $y = u^2$.

3) A pressão P (em kPa), o volume V (em L) e a temperatura T (em K) de um mol de um gás ideal relacionam-se pela equação $PV = 8,31 \cdot T$. Determine a taxa de variação da pressão quando a temperatura é 300 K e está aumentando a uma taxa de $0,1$ K/s e o volume é 100 L e está aumentando a uma taxa de 0,2 L/s.

Solução:

Em um dado instante, temos:

$$T = 300, \quad \frac{dT}{dt} = 0,1, \quad V = 100, \quad \frac{dV}{dt} = 0,2$$

Como

$$P = 8,31 \cdot \frac{T}{V}$$

pela Regra da Cadeia,

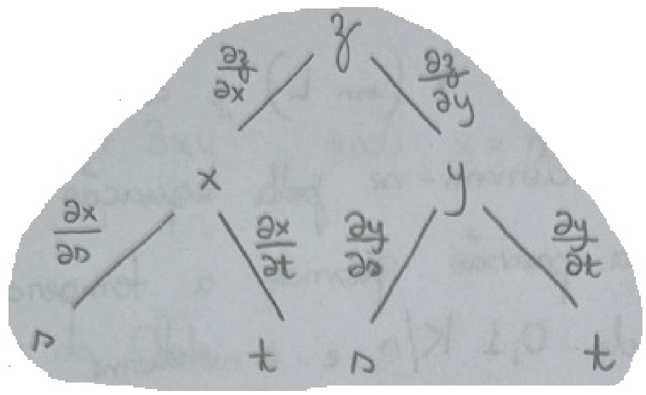
$$\begin{aligned}\frac{dP}{dt} &= \frac{\partial P}{\partial T} \cdot \frac{dT}{dt} + \frac{\partial P}{\partial V} \cdot \frac{dV}{dt} = \frac{8,31}{V} \cdot \frac{dT}{dt} - \frac{8,31T}{V^2} \cdot \frac{dV}{dt} \\ &= \frac{8,31}{100} \cdot (0,1) - \frac{8,31 \cdot 300}{100^2} \cdot (0,2) = -0,04155\end{aligned}$$

Logo, a pressão está decrescendo a uma taxa de $0,04155$ kPa/s.

- **Regra da Cadeia (Caso 2):** Suponha que $z = f(x,y)$ seja uma função diferenciável de x e y, onde $x = g(s,t)$ e $y = h(s,t)$ são funções diferenciáveis de s e t. Então,

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

Note:
s e t: variáveis independentes
x e y: variáveis intermediárias
z: variável dependente
Para lembrar, usamos o diagrama:



Exemplo: Se $z = e^x \operatorname{sen} y$, onde $x = st^2$ e $y = s^2 t$, determine $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial t}$.
Solução:
Pela Regra da Cadeia,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} = (e^x \operatorname{sen} y) \cdot \left(t^2\right) + (e^x \cos y) \cdot (2st) \\
&= t^2 e^{st^2} \operatorname{sen}\left(s^2 t\right) + 2ste^{st^2} \cos\left(s^2 t\right) \\
\frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = (e^x \operatorname{sen} y)(2st) + (e^x \cos y)\left(s^2\right) \\
&= 2ste^{st^2} \operatorname{sen}\left(s^2 t\right) + s^2 e^{st^2} \cos\left(s^2 t\right)
\end{aligned}$$

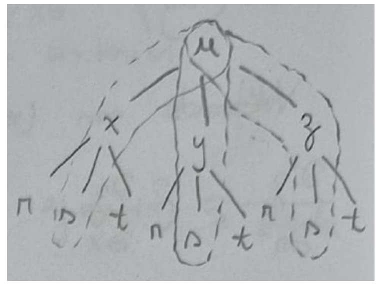
- **Regra da Cadeia (Versão geral):** Suponha que u seja uma função diferenciável de n variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$, onde cada x_j é uma função diferenciável de m variáveis $t_1, t_2, \ldots, t_m$. Então,

$$\frac{\partial u}{\partial t_i} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial t_i}$$

para cada $i = 1, 2, \ldots, m$.

Exemplos:

1) Se $u = x^4 y + y^2 z^3$, onde $x = rse^t, y = rs^2 e^{-t}$ e $z = r^2 s \operatorname{sen} t$, determine o valor de $\dfrac{\partial u}{\partial s}$ quando $r = 2, s = 1, t = 0$.



Solução:

Temos

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial s} &= \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial s}\\
&= \left(4x^3y\right)\left(re^t\right)+\left(x^4+2yz^3\right)\left(2rse^{-t}\right)+\left(3y^2z^2\right)\left(r^2\operatorname{sen}t\right)
\end{aligned}
$$

Quando $r=2, s=1$ e $t=0$, temos $x=2, y=2$ e $z=0$. Logo,

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_{(2,1,0)} &= \left(4\cdot 2^3\cdot 2\right)\left(2\cdot e^0\right)+\left(2^4+2\cdot 2\cdot 0\right)\left(2\cdot 2\cdot 1\cdot e^{-0}\right)+\left(3\cdot 2^2\cdot 0^2\right)\left(2^2\operatorname{sen}0\right)\\
&= 64\cdot 2+16\cdot 4=192
\end{aligned}
$$

2) Se $z=f(x,y)$ tem derivadas parciais de segunda ordem contínuas e $x=r^2+s^2$ e $y=2rs$, determine

a) $\dfrac{\partial z}{\partial r}$ **b)** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial r^2}$

Solução:

a) Temos

$$
\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot(2r)+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot(2s)
$$

b) Aplicando a Regra do Produto na expressão da parte (a), temos

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r}\left(2r\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+2s\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial r}(2r)\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+2r\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial r}(2s)\cdot\frac{\partial z}{\partial y}+2s\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\\
&= 2\frac{\partial z}{\partial x}+2r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)+0\cdot\frac{\partial z}{\partial y}+2s\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \qquad (*)
\end{aligned}
$$

Usando a Regra da Cadeia,

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot(2r) + \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\cdot(2s)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\cdot(2r) + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cdot(2s)$$

Voltando em (*),

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} &= 2\frac{\partial z}{\partial x} + 2r\left(2r\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2s\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\right) + 2s\left(2r\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + 2s\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\\ &= 2\frac{\partial z}{\partial x} + 4r^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 4rs\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} + 4rs\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + 4s^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\\ &= 2\frac{\partial z}{\partial x} + 4r^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 8rs\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + 4s^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\end{aligned}$$

Diferenciação Implícita

Suponhamos que uma equação da forma $F(x, y) = 0$ defina y implicitamente como uma função diferenciável de x, isto é, $y = f(x)$, onde $F(x, f(x)) = 0$ para todo x no domínio de f.

Se F é diferenciável, podemos aplicar o Caso 1 da Regra da Cadeia para diferenciar ambos os lados da equação $F(x, y) = 0$ com relação a x:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\underbrace{\frac{dx}{dx}}_{1} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} = 0$$

Se $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$, obtemos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

Exemplo: Determine $\dfrac{dy}{dx}$ se a função diferenciável $y = y(x)$ é dada implicitamente pela equação $x^3 + xy + y^3 = 3$.

Solução:

<u>1º modo:</u> Seja

$$F(x, y) = x^3 + xy + y^3 - 3 = 0$$

temos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{3x^2 + y}{x + 3y^2}$$

em todo x no domínio de $y = y(x)$, com $x + 3(y(x))^2 \neq 0$.

<u>2º modo:</u> Derivando ambos os lados da equação em relação a x:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\left(x^3 + xy + y^3\right) = \frac{d}{dx}(3) \\
\Rightarrow\ & 3x^2 + \frac{d}{dx}(x) \cdot y + x \cdot \frac{dy}{dx} + 3y^2 \frac{dy}{dx} = 0 \\
\Rightarrow\ & \left(x + 3y^2\right) \frac{dy}{dx} = -3x^2 - y \\
\Rightarrow\ & \frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2 + y}{x + 3y^2}
\end{aligned}$$

Suponha agora que z seja dado implicitamente como uma função $z = f(x, y)$ por uma equação da forma $F(x, y, z) = 0$. Isso significa que $F(x, y, f(x, y)) = 0$ para todo (x, y) no domínio de f. Se F e f forem diferenciáveis, utilizamos a Regra da Cadeia para derivar a equação $F(x, y, z) = 0$ com relação a x:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \underbrace{\frac{\partial x}{\partial x}}_{1} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \underbrace{\frac{\partial y}{\partial x}}_{0} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\
\Rightarrow\ & \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0
\end{aligned}$$

Se $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$, temos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

De maneira análoga, obtemos

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

Exemplo: Determine $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, onde a função diferenciável $z = z(x, y)$ é dada implicitamente pela equação $x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$.

Solução:

Seja $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz - 1 = 0$. Então,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{3x^2 + 6yz}{3z^2 + 6xy} = -\frac{x^2 + 2yz}{z^2 + 2xy}$$

6. Derivadas Direcionais e o Vetor Gradiente

Derivadas Direcionais

As derivadas direcionais são um tipo de derivada que nos permite encontrar a taxa de variação de uma função de duas ou mais variáveis em qualquer direção (não só nas direções dos eixos $x, y, z, \ldots$).

Lembre-se: Se $z = f(x, y)$, as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ são definidas como

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

e representam as taxas de mudança de z nas direções x e y, ou seja, nas direções dos vetores unitários $\vec{i}$ e $\vec{j}$.

Definição: A **derivada direcional** de f em (x_0, y_0) na direção do vetor unitário $\vec{u} = (a, b)$ é

$$D_{\vec{u}} f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

desde que esse limite exista.

Note que: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial \vec{i}}(x_0, y_0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial \vec{j}}(x_0, y_0)$.

Exemplo: Seja $\vec{u} = (a, b)$ um vetor unitário dado. Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, 0)$, onde
$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$

Solução:

Temos, para $h \neq 0$,

$$\frac{f(0 + ah, 0 + bh) - f(0, 0)}{h} = \frac{\frac{a^3h^3}{a^2h^2 + b^2h^2} - 0}{h} = \frac{a^3h^3}{h(a^2 + b^2)h^2} = \frac{a^3}{a^2 + b^2} = a^3,$$

pois $\vec{u}$ é unitário, então $a^2 + b^2 = 1$.

Logo,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0 + ah, 0 + bh) - f(0, 0)}{h} = a^3$$

Teorema: Se f é uma função diferenciável de x e y, então f tem derivada direcional na direção de qualquer vetor unitário $\vec{u} = (a, b)$ e

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot a + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot b$$

Observação: Se o vetor unitário $\vec{u}$ faz um ângulo θ com o eixo x positivo, então podemos escrever $\vec{u} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ e temos

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot \cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot \operatorname{sen}\theta$$

Exemplo: Encontre $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}$ se $f(x, y) = x^3 - 3xy + 4y^2$ e $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 2)$.

Solução:
Pelo Teorema,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\cdot\frac{1}{2}\\ &= \left(3x^2-3y\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+(-3x+8y)\cdot\frac{1}{2}\\ &= \frac{1}{2}\left[3\sqrt{3}x^2-3x+(8-3\sqrt{3})y\right]\end{aligned}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,2)=\frac{1}{2}\left[3\sqrt{3}\cdot 1^2-3\cdot 1+(8-3\sqrt{3})\cdot 2\right]=\frac{13-3\sqrt{3}}{2}$$

Vetor Gradiente

No Teorema anterior, note que a derivada direcional pode ser escrita como o produto escalar de dois vetores:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot a+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot b=\left\langle\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right\rangle\cdot\langle a,b\rangle=\underbrace{\left\langle\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right\rangle}_{(*)}\cdot\vec{u}$$

O primeiro vetor, $(*)$, aparece em muitas outras situações e, por isso, daremos a ele um nome especial: o gradiente de f.

Definição: Se f é uma função de duas variáveis x e y, então o **gradiente** de f é a função vetorial ∇f definida por

$$\nabla f(x,y)=\left\langle\frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right\rangle=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$$

Exemplo: Se $f(x,y)=\operatorname{sen} x+e^{xy}$, então encontre $\nabla f(x,y)$ e $\nabla f(0,1)$.
Solução:
Temos

$$\nabla f(x,y)=\left\langle\frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right\rangle=\langle\cos x+ye^{xy},xe^{xy}\rangle$$

e

$$\nabla f(0,1)=\left\langle\cos 0+1\cdot e^0,0\cdot e^0\right\rangle=\langle 2,0\rangle.$$

Com a notação de vetor gradiente, podemos reescrever o teorema para a derivada direcional de uma função diferenciável como

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x,y)=\nabla f(x,y)\cdot\vec{u}.$$

Exemplo: Determine a derivada direcional da função $f(x,y)=x^2y^3-4y$ no ponto $(2,-1)$ na direção do vetor $\vec{v}=2\vec{i}+5\vec{j}$.
Solução:

Primeiramente, vamos calcular o vetor gradiente em $(2,-1)$:

$$\nabla f(x,y) = \left\langle 2xy^3, 3x^2y^2 - 4 \right\rangle$$

e

$$\nabla f(2,-1) = \left\langle 2\cdot 2\cdot(-1)^3, 3\cdot 2^2\cdot(-1)^2 - 4 \right\rangle = \langle -4, 8\rangle$$

Observe que $\vec{v} = 2\vec{i} + 5\vec{j} = (2,5)$ não é um vetor unitário, pois

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{2^2+5^2} = \sqrt{29}.$$

Mas podemos considerar o versor

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \left\langle \frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}} \right\rangle$$

Logo,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(2,-1) &= \nabla f(2,-1)\cdot\vec{u} = \langle -4, 8\rangle \cdot \left\langle \frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}} \right\rangle = \frac{-4\cdot 2 + 8\cdot 5}{\sqrt{29}} \\ &= \frac{32}{\sqrt{29}} = \frac{32\sqrt{29}}{29}.\end{aligned}$$

Observação: Tudo o que foi feito nesta seção se generaliza para funções reais de três ou mais variáveis.

Exemplo: Se $f(x,y,z) = xyz$, então

a) determine o gradiente de f;

b) determine a derivada direcional de f no ponto $(1,1,3)$ e na direção de $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

Solução:

a) O gradiente de f é

$$\nabla f(x,y,z) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right\rangle = \langle yz, xz, xy\rangle$$

b) No ponto $(1,1,3)$, temos

$$\nabla f(1,1,3) = \langle 1\cdot 3, 1\cdot 3, 1\cdot 1\rangle = \langle 3,3,1\rangle$$

O vetor unitário na direção de $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} = (1,1,1)$ é

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\rangle$$

Assim,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,1,3) = \langle 3,3,1\rangle \cdot \left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right\rangle = \frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}.$$

Maximizando a derivada direcional

Podemos calcular $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}$ em todas as direções possíveis, mas podemos perguntar: em qual dessas direções f varia mais rapidamente? Qual é a taxa máxima de variação?

O próximo teorema responde a essas questões.

Teorema: Suponha que f seja uma função diferenciável (de duas ou três variáveis). O valor máximo da derivada direcional $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(\overline{x})$ é $\|\nabla f(\overline{x})\|$ e ocorre quando $\vec{u}$ tem a mesma direção do vetor gradiente $\nabla f(\overline{x})$. (Isto é, quando $\vec{u}$ for o versor de $\nabla f(\overline{x})$).

Dem.:

Temos

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}} = \nabla f \cdot \vec{u} = \|\nabla f\| \cdot \|\vec{u}\| \cdot \cos\theta \overset{\|\vec{u}\|=1}{=} \|\nabla f\| \cdot \cos\theta$$

onde θ é o ângulo entre ∇f e $\vec{u}$. O valor máximo de $\cos\theta$ é 1 e isso ocorre quando $\theta = 0$. Logo, o valor máximo de $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}$ é $\|\nabla f\|$ e ocorre quando $\theta = 0$, ou seja, quando $\vec{u}$ tem a mesma direção que ∇f.

$\square$

Exemplos:

1) **a)** Se $f(x,y) = xe^y$, determine a taxa de variação de f no ponto $P(2,0)$ na direção de P para $Q\left(\frac{1}{2}, 2\right)$.

b) Em que direção f tem a máxima taxa de variação? Qual é a máxima taxa de variação?

Solução:

a) Primeiro, calcularemos o vetor gradiente:

$$\nabla f(x,y) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle = \langle e^y, xe^y \rangle$$

e

$$\nabla f(2,0) = \langle 1, 2 \rangle$$

O vetor unitário na direção $\overrightarrow{PQ} = \left\langle \frac{1}{2} - 2, 2 - 0 \right\rangle = \left\langle -\frac{3}{2}, 2 \right\rangle$ é

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{PQ}}{\|\overrightarrow{PQ}\|} = \frac{\left\langle -\frac{3}{2}, 2 \right\rangle}{\sqrt{\frac{9}{4} + 4}} = \frac{\left\langle -\frac{3}{2}, 2 \right\rangle}{\frac{5}{2}} = \left\langle -\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right\rangle$$

Logo, a taxa de variação de f na direção que vai de P a Q é

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(2,0) = \nabla f(2,0) \cdot \vec{u} = \langle 1, 2 \rangle \cdot \left\langle -\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right\rangle = -\frac{3}{5} + \frac{8}{5} = 1$$

b) Pelo Teorema, f aumenta mais depressa na direção do gradiente $\nabla f(2,0) = \langle 1, 2\rangle$. A taxa máxima de variação é

$$\|\nabla f(2,0)\| = \|\langle 1,2\rangle\| = \sqrt{5}.$$

2) Suponha que a temperatura em um ponto (x, y, z) do espaço seja dada por $T(x,y,z) = \dfrac{80}{1+x^2+2y^2+3z^2}$, onde T é medida em °C e x, y e z em metros. Em que direção no ponto $(1, 1, -2)$ a temperatura aumenta mais rapidamente? Qual é a taxa máxima de aumento?

Solução:

O gradiente de T é

$$\begin{aligned}
\nabla T &= \left\langle \frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right\rangle \\
&= \left\langle -\frac{160x}{(1+x^2+2y^2+3z^2)^2}, -\frac{320y}{(1+x^2+2y^2+3z^2)^2}, -\frac{480z}{(1+x^2+2y^2+3z^2)^2} \right\rangle \\
&= \frac{-160}{(1+x^2+2y^2+3z^2)^2}\langle x, 2y, 3z\rangle
\end{aligned}$$

No ponto $(1, 1, -2)$, temos $1 + 1^2 + 2(1)^2 + 3(-2)^2 = 1 + 1 + 2 + 12 = 16$. Assim,

$$\nabla T(1,1,-2) = \frac{-160}{16^2}\langle 1, 2, 3(-2)\rangle = \frac{-160}{256}\langle 1,2,-6\rangle = -\frac{5}{8}\langle 1,2,-6\rangle = \frac{5}{8}\langle -1,-2,6\rangle$$

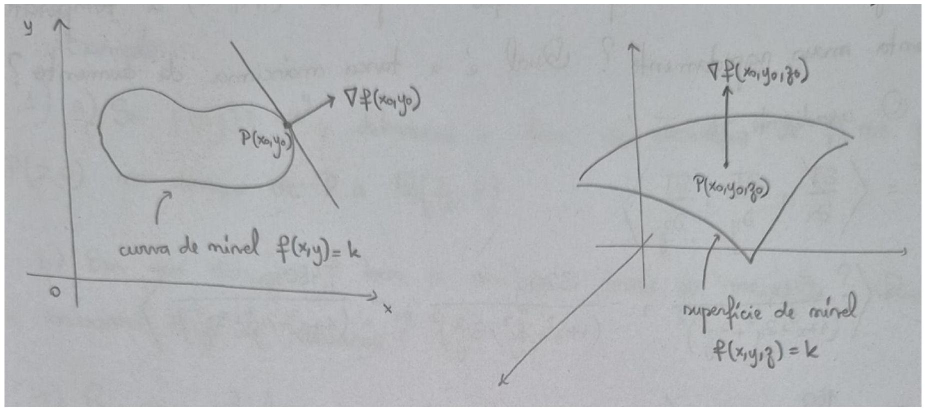
Pelo Teorema, a temperatura aumenta mais rapidamente na direção do vetor gradiente $\nabla T(1, 1, -2)$, ou, de forma equivalente, na direção do vetor $\langle -1, -2, 6\rangle$. A taxa máxima de aumento é dada por

$$\|\nabla T(1,1,-2)\| = \frac{5}{8}\|\langle -1,-2,6\rangle\| = \frac{5}{8}\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+6^2} = \frac{5\sqrt{41}}{8}.$$

Portanto, a taxa máxima de aumento da temperatura é $\frac{5\sqrt{41}}{8} \approx 4$°C/m.

Geometricamente:

O vetor gradiente de f é sempre ortogonal à curva (ou superfície) de nível de f (dependendo se f é de duas ou três variáveis). É o vetor diretor da reta normal à curva/superfície no ponto.



7. Valores Máximos e Mínimos

Definição: Uma função de duas variáveis tem um **máximo local** em (a, b) se $f(x, y) \leqslant f(a, b)$ quando (x, y) está próximo de (a, b). O número $f(a, b)$ é chamado de **valor máximo local**. Se $f(x, y) \geqslant f(a, b)$ quando (x, y) está próximo de (a, b), então f tem um **mínimo local** em (a, b) e $f(a, b)$ é um **valor mínimo local**.

Se $f(x, y) \leqslant f(a, b)$ (ou $f(x, y) \geqslant f(a, b)$) para todos os pontos (x, y) do domínio de f, então f tem um **máximo absoluto** (ou **mínimo absoluto**) em (a, b). (Também chamados de máximo e mínimo globais).

Teorema: Se f tem um máximo ou mínimo local em (a, b) e as derivadas parciais de primeira ordem de f existirem nesse ponto, então $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$.

$\rightarrow$ Interpretação geométrica: O gráfico de uma função f tem um plano tangente em um ponto de máximo ou mínimo local, e esse plano é horizontal.

Definição: Um ponto (a, b) é chamado de **ponto crítico** (ou **ponto estacionário**) de f se $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$, ou se uma das derivadas parciais não existir.

Observação: Segue do Teorema que, se f tem um máximo ou mínimo local em (a, b), então (a, b) é um ponto crítico de f.

Porém, nem todo ponto crítico é um ponto de máximo ou de mínimo!

Exemplos

1) Seja $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$. Então,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x - 2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y - 6$$

Temos que essas derivadas parciais são nulas quando $x = 1$ e $y = 3$. Logo, o único ponto crítico é $(1, 3)$.

Completando os quadrados, temos:

$$f(x,y) = 4 + (x-1)^2 + (y-3)^2$$

(que é um parabolóide elíptico).

Note que

$$f(x,y) \geqslant 4, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \text{ pois } (x-1)^2 \geqslant 0 \text{ e } (y-3)^2 \geqslant 0.$$

Portanto, $f(1,3) = 4$ é um **mínimo absoluto** de f.

2) Determine os valores extremos de $f(x,y) = y^2 - x^2$ (parabolóide hiperbólico).

Solução:

Como

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2x \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y,$$

o único ponto crítico é $(0,0)$.

Observe que, para os pontos sobre o eixo x (onde $y=0$), temos

$$f(x,0) = -x^2 < 0 \quad (\text{se } x \neq 0).$$

Entretanto, para os pontos sobre o eixo y (onde $x=0$), temos

$$f(0,y) = y^2 > 0 \quad (\text{se } y \neq 0).$$

Logo, todo disco com centro em $(0,0)$ contém pontos onde a função tem valores positivos e negativos. Então, $f(0,0) = 0$ não pode ser um valor extremo de f e, portanto, f não tem valor extremo.

O ponto $(0,0)$ é chamado de **ponto de sela** de f.

Precisamos ser capazes de determinar se uma função tem um valor extremo em um ponto crítico.

Teste da Segunda Derivada: Suponha que as segundas derivadas parciais de f sejam contínuas em uma bola aberta com centro em (a,b), e suponha que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$ [ou seja, (a,b) é um ponto crítico de f]. Seja

$$D = D(a,b) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\right]^2 \quad (\text{Hessiano de } f).$$

(a) Se $D > 0$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) > 0$, então $f(a,b)$ é um mínimo local.

(b) Se $D > 0$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) < 0$, então $f(a,b)$ é um máximo local.

(c) Se $D < 0$, então $f(a,b)$ não é mínimo local nem máximo local.

Observações:

1. No caso (c), o ponto (a,b) é chamado de **ponto de sela** de f, e o gráfico de f cruza seu plano tangente em (a,b).

2. Se $D = 0$, o teste não fornece nenhuma informação: f pode ter um máximo local ou um mínimo local em (a,b), ou (a,b) pode ser um ponto de sela.

3. Para lembrar a fórmula de D, é útil escrevê-la como um determinante:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right]^2$$

Exemplos:

1) Determine os valores máximos e mínimos locais e os pontos de sela de $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y + 4$.

Solução:

Primeiramente, localizaremos os pontos críticos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 1$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm 1$$

Logo, os pontos críticos são: $(1,1), (1,-1), (-1,1), (-1,-1)$.

Além disso,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 6y$$

e

$$D(x,y) = \begin{vmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{vmatrix} = 36xy$$

Analisando em cada um dos pontos críticos:

- $D(1,1) = 36 > 0$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = 6 > 0$; logo, $(1,1)$ é um ponto de mínimo local e $f(1,1) = 0$ é um mínimo local.
- $D(-1,-1) = 36 > 0$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,-1) = -6 < 0$; logo, $(-1,-1)$ é ponto de máximo local e $f(-1,-1) = 8$ é máximo local.
- $D(1,-1) = -36 < 0$ e $D(-1,1) = -36 < 0$; logo, $(1,-1)$ e $(-1,1)$ são pontos de sela.

2) Seja $f(x,y) = 3x^4 + 2y^4$. O único ponto crítico de f é $(0,0)$ e temos $D(0,0) = 0$; logo, o Teste da Segunda Derivada não nos fornece informação sobre esse ponto crítico.

Porém, note que $f(x,y) = 3x^4 + 2y^4 \geqslant 0 = f(0,0),\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Logo, $(0,0)$ é ponto de mínimo absoluto.

3) Uma caixa retangular sem tampa deve ser feita com 12 m^2 de papelão. Determine o volume máximo dessa caixa.

Solução:

Sejam x, y e z o comprimento, a largura e a altura da caixa (em metros). Então, o volume da caixa é

$$V = xyz.$$

Além disso, usando o fato de que a área dos quatro lados e do fundo da caixa é 12 m^2, temos:

$$2xz + 2yz + xy = 12 \Rightarrow z = \frac{12 - xy}{2(x+y)}$$

Substituindo na expressão de V,

$$V(x,y) = xy \cdot \frac{12 - xy}{2(x+y)} = \frac{12xy - x^2y^2}{2(x+y)}$$

Calculando as derivadas parciais:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{y^2\left(12 - 2xy - x^2\right)}{2(x+y)^2}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{x^2\left(12 - 2xy - y^2\right)}{2(x+y)^2}$$

Como queremos V máximo, então $\dfrac{\partial V}{\partial x} = \dfrac{\partial V}{\partial y} = 0$. Mas, observe que $x = 0$ ou $y = 0$ daria $V = 0$, de modo que precisamos resolver as equações:

$$\begin{aligned} 12 - 2xy - x^2 &= 0 \quad \text{(I)} \\ 12 - 2xy - y^2 &= 0 \quad \text{(II)} \end{aligned}$$

De (I) e (II), segue que $x^2 = y^2$. Como $x, y > 0$, temos $x = y$.

Substituindo $x = y$ em (I):

$$12 - 2x^2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 12 \Leftrightarrow x^2 = 4 \quad \overset{x \geqslant 0}{\Rightarrow} x = 2$$

Além disso,

$$y = x = 2 \quad \text{e} \quad z = \frac{12 - 2 \cdot 2}{2(2+2)} = 1.$$

Logo, um ponto crítico é quando $x = y = 2$ e $z = 1$.

Podemos usar o Teste da Segunda Derivada para mostrar que o ponto obtido é um máximo local de V, ou podemos argumentar que a natureza física do problema exige a existência de um máximo absoluto, que deve ocorrer em um ponto crítico de V. Portanto, esse máximo ocorre quando $x = 2, y = 2$ e $z = 1$. Assim, $V = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$ m^3 é o volume máximo da caixa.

Valores Máximo e Mínimo Absolutos

Para funções de uma variável: se f é contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, então f tem um valor mínimo absoluto e um valor máximo absoluto. Para acharmos esses valores, calculamos f não somente nos pontos críticos, mas também nas extremidades a e b.

Para as funções de duas variáveis, a situação é semelhante.

Um **conjunto fechado** em $\mathbb{R}^2$ contém todos os seus pontos de fronteira. [Um ponto da fronteira de D é um ponto (a, b) tal que qualquer bola aberta com centro em (a, b) contém pontos de D e pontos não pertencentes a D].

Por exemplo, o disco $D = \left\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\right\}$ é um conjunto fechado, porque contém todos os seus pontos da fronteira (que são os pontos sobre a circunferência $x^2 + y^2 = 1$).

Um **conjunto limitado** em $\mathbb{R}^2$ é aquele que está contido em alguma bola aberta. (Em outras palavras, ele é finito em extensão).

Teorema do Valor Extremo: Se f é contínua em um conjunto fechado e limitado D em $\mathbb{R}^2$, então f assume um valor máximo absoluto $f(x_1, y_1)$ e um valor mínimo absoluto $f(x_2, y_2)$ em alguns pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) de D.

Roteiro para determinar os valores máximo e mínimo absolutos de uma função contínua f em um conjunto fechado e limitado D:

1. Determine os valores de f nos pontos críticos de f em D.

2. Determine os valores extremos de f na fronteira de D.

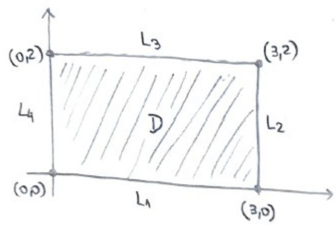
3. O maior dos valores dos passos 1 e 2 é o valor máximo absoluto, e o menor desses valores é o valor mínimo absoluto.

Exemplos:

1) Determine os valores máximo e mínimo absolutos da função $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$ no retângulo $D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 3, 0 \leqslant y \leqslant 2\}$.

Solução:

Como f é um polinômio, ela é contínua no retângulo fechado e limitado D, portanto o Teorema do Valor Extremo nos diz que existem tanto o máximo absoluto como o mínimo absoluto.



- Pontos críticos de f em D:

Ocorrem quando

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2x + 2 = 0$$

e, assim, o único ponto crítico existente é $(1,1)$, com $f(1,1) = 1$.

- Valores de f na fronteira de D:

A fronteira de D é constituída por quatro segmentos de reta: L_1, L_2, L_3 e L_4.

Em L_1, temos $y = 0$ e

$$f(x,0) = x^2, \quad 0 \leqslant x \leqslant 3.$$

Isto corresponde a uma função crescente de x, que tem valor mínimo $f(0,0) = 0$ e máximo $f(3,0) = 9$.

Em L_2, temos $x = 3$ e

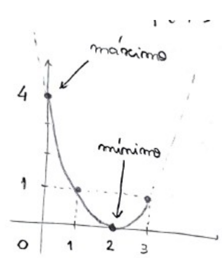
$$f(3,y) = 9 - 6y + 2y = 9 - 4y, \quad 0 \leq y \leq 2.$$

Essa é uma função decrescente de y, portanto seu máximo é $f(3,0) = 9$ e seu mínimo é $f(3,2) = 1$.

Em L_3, temos $y = 2$ e

$$f(x,2) = x^2 - 4x + 4, \quad 0 \leqslant x \leqslant 3.$$

Note que $f(x,2) = (x-2)^2$. No intervalo $x \in [0,3]$, o valor mínimo dessa função é $f(2,2) = 0$ e seu valor máximo é $f(0,2) = 4$.



Em L_4, temos $x = 0)$ e

$$f(0, y) = 2y, \quad 0 \leqslant y \leqslant 2.$$

Esta função tem valor máximo $f(0, 2) = 4$ e mínimo $f(0, 0) = 0$.

Portanto, na fronteira, o valor mínimo de f é 0 e o máximo é 9.

- Comparando os valores:

Comparamos os valores da fronteira com o valor no ponto crítico, $f(1, 1) = 1$. Concluímos que o valor máximo absoluto de f em D é $f(3, 0) = 9$, e o valor mínimo absoluto é $f(0, 0) = f(2, 2) = 0$.

2) Determine os valores máximo e mínimo absolutos da função $f(x, y) = xy$ no disco $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Solução:

Como f é um polinômio, ela é contínua no disco fechado e limitado A, portanto o Teorema do Valor Extremo nos diz que existem tanto o máximo absoluto quanto o mínimo absoluto.

- Pontos Críticos no Interior de A:

Os pontos críticos ocorrem quando as derivadas parciais são nulas:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x = 0$$

Assim, o único ponto crítico no interior de A é $(0, 0)$, e o valor da função neste ponto é $f(0, 0) = 0$. (Note que não é difícil observar que este ponto não é nem máximo nem mínimo em A).

- Valores de f na Fronteira de A:

A fronteira de A é a circunferência $x^2 + y^2 = 1$. Podemos parametrizá-la como:

$$\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t), \quad \text{para } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Dessa forma, os valores de f na fronteira de A são fornecidos pela função

$$F(t) = f(\cos t, \operatorname{sen} t) = \cos t \cdot \operatorname{sen} t = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2t), \quad \text{para } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Agora, procuramos os valores máximo e mínimo de $F(t)$.

O valor máximo de $F(t)$ ocorre quando $\operatorname{sen}(2t) = 1$:

$$\operatorname{sen}(2t) = 1 \Leftrightarrow 2t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

No intervalo $0 \leq t \leq 2\pi$, temos as soluções $t = \frac{\pi}{4}$ e $t = \frac{5\pi}{4}$. O valor máximo na fronteira é $F(\pi/4) = F(5\pi/4) = \frac{1}{2}$.

O valor mínimo de $F(t)$ ocorre quando $\operatorname{sen}(2t) = -1$:

$$\operatorname{sen}(2t) = -1 \Leftrightarrow 2t = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow t = \frac{3\pi}{4} + k\pi$$

No intervalo $0 \leq t \leq 2\pi$, temos as soluções $t = \frac{3\pi}{4}$ e $t = \frac{7\pi}{4}$. O valor mínimo na fronteira é $F(3\pi/4) = F(7\pi/4) = -\frac{1}{2}$.

- Conclusão:

Comparando os valores encontrados (o valor no ponto crítico, 0, e os valores extremos na fronteira, $\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}$), concluímos que:

- O valor máximo absoluto de f em A é $\frac{1}{2}$, que ocorre nos pontos correspondentes a $t = \frac{\pi}{4}$ e $t = \frac{5\pi}{4}$, ou seja, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
- O valor mínimo absoluto de f em A é $-\frac{1}{2}$, que ocorre nos pontos correspondentes a $t = \frac{3\pi}{4}$ e $t = \frac{7\pi}{4}$, ou seja, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

8. Multiplicadores de Lagrange

No Exemplo 3 da seção anterior, maximizamos a função volume $V = xyz$ sujeita à restrição $2xz + 2yz + xy = 12$. Nesta seção, veremos o Método dos Multiplicadores de Lagrange para maximizar uma função genérica $f(x, y, z)$ sujeita a uma restrição da forma $g(x, y, z) = k$.

Método dos Multiplicadores de Lagrange (MML):

Para determinar os valores máximo e mínimo de $f(x, y, z)$ sujeita à restrição $g(x, y, z) = k$ [supondo que esses valores extremos existam e que $\nabla g \neq \vec{0}$ sobre a superfície $g(x, y, z) = k$]:

(a) Determine todos os valores de x, y, z e λ tais que

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \cdot \nabla g(x, y, z) \quad \text{e} \quad g(x, y, z) = k.$$

(b) Calcule o valor de f em todos os pontos (x, y, z) que resultaram do passo (a). O maior desses valores será o valor máximo de f, e o menor será o valor mínimo de f.

O número λ é chamado de **multiplicador de Lagrange**.

Observação: Para as funções de duas variáveis, o método é análogo: para acharmos os valores extremos de $f(x, y)$ sujeitos à restrição $g(x, y) = k$, olhamos para todos os valores de x, y e λ tais que

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \quad \text{e} \quad g(x, y) = k.$$

Vamos refazer o Exemplo 3 da seção anterior, utilizando o Método de Lagrange, e verificar que as contas diminuem um pouco.

Exemplos:

1) Uma caixa retangular sem tampa deve ser feita com 12m^2 de papelão. Determine o volume máximo dessa caixa.

Solução:

Sejam x, y e z o comprimento, a largura e a altura, respectivamente, da caixa em metros. Queremos maximizar

$$V(x,y,z) = xyz$$

sujeita à restrição

$$g(x,y,z) = 2xz + 2yz + xy = 12.$$

Utilizando o MML, olharemos para os valores de x, y, z e λ tais que $\nabla V = \lambda \nabla g$ e $g(x,y,z) = 12$, ou seja:

$$\begin{cases} yz = \lambda(2z + y) & (1) \\ xz = \lambda(2z + x) & (2) \\ xy = \lambda(2x + 2y) & (3) \\ 2xz + 2yz + xy = 12 & (4) \end{cases}$$

Multiplicando (1) por x, (2) por y e (3) por z, temos

$$\begin{array}{ll} xyz = \lambda(2xz + xy) & (5) \\ xyz = \lambda(2yz + xy) & (6) \\ xyz = \lambda(2xz + 2yz) & (7) \end{array}$$

Note que $\lambda \neq 0$, pois se $\lambda = 0$, teríamos $yz = xz = xy = 0$ (de (1), (2) e (3)), o que contradiz (4). Logo, de (5) e (6), temos:

$$2xz + xy = 2yz + xy \;\Rightarrow\; xz = yz \;\overset{z\neq 0}{\Rightarrow}\; x = y$$

De (6) e (7), temos:

$$2yz + xy = 2xz + 2yz \;\Rightarrow\; xy = 2xz \;\overset{x\neq 0}{\Rightarrow}\; y = 2z$$

Substituindo $x = y = 2z$ em (4), temos:

$$2(2z)z + 2(2z)z + (2z)(2z) = 12 \Rightarrow 4z^2 + 4z^2 + 4z^2 = 12 \Rightarrow 12z^2 = 12 \overset{z\geq 0}{\Rightarrow} z = 1$$

Logo, $x = 2$ e $y = 2$.

Portanto, o volume máximo da caixa é $V = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4\ \text{m}^3$.

2) Considere a função $f(x,y) = x^2 + 2y^2$. Determine os valores extremos de f:

a) no círculo $x^2 + y^2 = 1$.

b) no disco $x^2 + y^2 \leq 1$.

Solução:

a) Queremos calcular os valores extremos de f sujeita à restrição $g(x,y) = x^2 + y^2 = 1$.

Usando o MML, resolveremos as equações $\nabla f = \lambda \nabla g$ e $g(x, y) = 1$, ou seja:

$$\begin{cases} 2x = 2x\lambda & (1) \\ 4y = 2y\lambda & (2) \\ x^2 + y^2 = 1 & (3) \end{cases}$$

De (1), temos $x(1 - \lambda) = 0$, ou seja, $x = 0$ ou $\lambda = 1$.

- Se $x = 0$, então, de (3): $y = \pm 1$. Pontos $(0, 1)$ e $(0, -1)$.
- Se $\lambda = 1$, então, de (2): $4y = 2y \Rightarrow 2y = 0 \Rightarrow y = 0$. De (3), temos $x = \pm 1$. Pontos $(1, 0)$ e $(-1, 0)$.

Dessa forma, os possíveis pontos de extremo são $(0, 1), (0, -1), (1, 0), (-1, 0)$. Calculando f nesses quatro pontos:

$$f(0, 1) = 2, \quad f(0, -1) = 2, \quad f(1, 0) = 1, \quad f(-1, 0) = 1.$$

Portanto, o valor máximo de f no círculo $x^2 + y^2 = 1$ é 2 e o valor mínimo é 1.

b) Como f é contínua no disco fechado e limitado, vamos comparar os valores obtidos no item (a) (fronteira do disco) com os valores de f nos pontos críticos do interior do disco.

Uma vez que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y = 0,$$

o único ponto crítico é $(0, 0)$, e $f(0, 0) = 0$.

Portanto, comparando o valor no ponto crítico com os valores na fronteira, o valor máximo de f no disco $x^2 + y^2 \leqslant 1$ é 2 (ocorre em $(0, \pm 1)$) e o valor mínimo é 0 (ocorre em $(0, 0)$).

Duas Restrições

Para determinar os valores máximo e mínimo de $f(x, y, z)$ sujeita a duas restrições, $g(x, y, z) = k$ e $h(x, y, z) = c$:

(a) Determine todos os valores de x, y, z, λ e μ tais que

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) + \mu \nabla h(x, y, z)$$

e as duas equações de restrição são satisfeitas.

(b) Calcule f em todos os pontos (x, y, z) que resultaram do passo (a). O maior desses valores será o valor máximo de f, e o menor será o valor mínimo de f.

Exemplo 3) Determine o valor máximo da função $f(x,y,z) = x + 2y + 3z$ na curva de intersecção do plano $x - y + z = 1$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

Solução:

Queremos calcular o valor máximo da função f sujeita às restrições

$$g(x,y,z) = x - y + z = 1 \quad \text{e} \quad h(x,y,z) = x^2 + y^2 = 1.$$

A condição de Lagrange é

$$\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h \iff (1,2,3) = \lambda(1,-1,1) + \mu(2x, 2y, 0),$$
$$g(x,y,z) = x - y + z = 1 \quad \text{e} \quad h(x,y,z) = x^2 + y^2 = 1$$

que leva ao sistema:

$$\begin{cases} 1 = \lambda + 2x\mu & (1) \\ 2 = -\lambda + 2y\mu & (2) \\ 3 = \lambda & (3) \\ x - y + z = 1 & (4) \\ x^2 + y^2 = 1 & (5) \end{cases}$$

Substituindo $\lambda = 3$ de (3) em (1) e (2), obtemos:

De (1): $1 = 3 + 2x\mu \ \Rightarrow \ 2x\mu = -2 \ \Rightarrow \ x = -\dfrac{1}{\mu}$.

De (2): $2 = -3 + 2y\mu \ \Rightarrow \ 2y\mu = 5 \Rightarrow y = \dfrac{5}{2\mu}$.

Substituindo em (5), temos:

$$\left(-\frac{1}{\mu}\right)^2 + \left(\frac{5}{2\mu}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{1}{\mu^2} + \frac{25}{4\mu^2} = 1 \Rightarrow \frac{4+25}{4\mu^2} = 1 \Rightarrow 4\mu^2 = 29 \Rightarrow \mu = \pm\frac{\sqrt{29}}{2}$$

Então,

$$x = -\frac{1}{\mu} = \mp\frac{2}{\sqrt{29}} \quad \text{e} \quad y = \frac{5}{2\mu} = \pm\frac{5}{\sqrt{29}}.$$

E de (4),

$$z = 1 - x + y = 1 - \left(\mp\frac{2}{\sqrt{29}}\right) + \left(\pm\frac{5}{\sqrt{29}}\right) \ \Rightarrow \ z = 1 \pm \frac{7}{\sqrt{29}}.$$

Os valores correspondentes de f são:

$$f = \left(\mp\frac{2}{\sqrt{29}}\right) + 2\left(\pm\frac{5}{\sqrt{29}}\right) + 3\left(1 \pm \frac{7}{\sqrt{29}}\right) = 3 + \frac{\mp 2 \pm 10 \pm 21}{\sqrt{29}}.$$

- Para $\mu = +\frac{\sqrt{29}}{2}$: $x = -\frac{2}{\sqrt{29}}$, $y = \frac{5}{\sqrt{29}}$, $z = 1 + \frac{7}{\sqrt{29}}$.

$$f = 3 + \frac{-2+10+21}{\sqrt{29}} = 3 + \frac{29}{\sqrt{29}} = 3 + \sqrt{29}.$$

- Para $\mu = -\frac{\sqrt{29}}{2}$: $x = \frac{2}{\sqrt{29}}$, $y = -\frac{5}{\sqrt{29}}$, $z = 1 - \frac{7}{\sqrt{29}}$.

$$f = 3 + \frac{2-10-21}{\sqrt{29}} = 3 - \frac{29}{\sqrt{29}} = 3 - \sqrt{29}.$$

Portanto, o valor máximo de f na curva dada é $3 + \sqrt{29}$.