

2ª Lista de Exercícios Álgebra Linear

Base e Dimensão

Seção 2.1

Exercício 1 * Mostre que $\{0, u_1, \dots, u_n\} \subset V$ é um conjunto L.D., onde 0 é o elemento neutro do espaço vetorial V .

Exercício 2 Verifique, em cada um dos itens abaixo, se o subconjunto S do espaço vetorial V é L.I. ou L.D.

(a) $S = \{(1, 2), (-3, 1)\}$, $V = \mathbb{R}^2$.

(b) $S = \{1 + t - t^2, 2 + 5t - 9t^2\}$, $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

(c) $S = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, $V = M_2(\mathbb{R})$.

(d) $S = \{(1, 2, 2, -3), (-1, 4, -2, 0)\}$, $V = \mathbb{R}^4$.

(e) $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 10 & 5 & 7 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, $V = M_3(\mathbb{R})$.

Exercício 3 Mostre que o conjunto $\{1, \sin^2 x, \cos^2 x\}$ de vetores de $C([-\pi, \pi])$ é L.D..

Exercício 4 Suponha que $\{v_1, \dots, v_n\}$ é um subconjunto L.I. de um espaço vetorial. Mostre que $\{a_1 v_1, \dots, a_n v_n\}$ também é L.I., desde que os escalares a_i sejam todos não nulos.

Seções 2.2 e 2.3

Exercício 5 Verifique se os elementos de $B = \{1 + x, 1 - x, 1 - x^2\}$ formam uma base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

Exercício 6 Encontre uma base para o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ dado por $U = [(1, 0, 1), (1, 2, 0), (0, 2, -1)]$.

Exercício 7 Mostre que o subconjunto $\{1, i\}$ é uma base de $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$.

Exercício 8 * No espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, considere os seguintes subespaços:

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\} \quad e \quad V = [(1, 2, 0), (3, 1, 2)].$$

Determine uma base e a dimensão dos subespaços U , V , $U + V$ e $U \cap V$.

Exercício 9 Dar uma base e a dimensão do subespaço W de $\mathbb{R}^4$, onde $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y = y \text{ e } x - 3y + t = 0\}$.

Exercício 10 No espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, considere os seguintes subespaços:

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}, V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y - 2z = 0\} \quad e \quad W = [(1, 1, 0), (0, 0, 2)].$$

Determine uma base e a dimensão dos subespaços: U , V , W , $U \cap V$ e $V + W$ e $U + V + W$.

Seções 2.4 e 2.5

Exercício 11 Determine as coordenadas do vetor $u = (-1, 8, 5) \in \mathbb{R}^3$ em relação a cada uma das bases abaixo:

- (a) base canônica.
- (b) $\{(0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}$.
- (c) $\{(1, 2, 1), (0, 3, 2), (1, 1, 4)\}$.

Exercício 12 Determine as coordenadas de $p(t) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, dado por $p(t) = 10 + t^2 + 2t^3$, $t \in \mathbb{R}$, em relação às seguintes bases de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$:

- (a) base canônica.
- (b) $\{1, 1 + t, 1 + t + t^2, 1 + t + t^2 + t^3\}$.
- (c) $\{4 + t, 2, 2 - t^2, t + t^3\}$.

Exercício 13 Determine as coordenadas do vetor $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -8 & 7 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ em relação às seguintes bases de $M_2(\mathbb{R})$:

- (a) base canônica.
- (b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Exercício 14 * Considere as bases $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ e $C = \{g_1, g_2, g_3\}$ de um espaço vetorial V relacionadas da seguinte forma:

$$\begin{cases} g_1 = e_1 + e_2 - e_3 \\ g_2 = 2e_2 + 3e_3 \\ g_3 = 3e_1 + e_3 \end{cases}$$

- (a) Determine as matrizes mudança da base B para a base C , isto é, M_B^C , e da base C para a base B , isto é, M_C^B .

- (b) Se a matriz das coordenadas do vetor v em relação à base B , isto é, $(v)_B$, é dada por $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ encontre a matriz das coordenadas de v em relação a base C , isto é, $(v)_C$.

- (c) Se a matriz das coordenadas do vetor v em relação à base C , isto é, $(v)_C$, é dada por $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ encontre a matriz das coordenadas de v em relação a base B , isto é, $(v)_B$.

Exercício 15 Considere as bases ordenadas $B = \{1, 1 + t, 1 + t^2\}$ e $C = \{1, t, t^2\}$ de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

- (a) Determine as matrizes mudança da base B para a base C , isto é, M_B^C , e da base C para a base B , isto é, M_C^B .

- (b) Se a matriz das coordenadas do vetor v em relação à base B , isto é, $(v)_B$, é dada por $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$ encontre a matriz das coordenadas de v em relação a base C , isto é, $(v)_C$.

- (c) Se a matriz das coordenadas do vetor v em relação à base C , isto é, $(v)_C$, é dada por $\begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ encontre a matriz das coordenadas de v em relação a base B , isto é, $(v)_B$.

Exercício 16 Considere o seguinte subespaço de $M_2(\mathbb{R})$:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid x - y - z = 0 \right\}.$$

- (a) Mostre que B dada pelas matrizes

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e C dada pelas matrizes

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

são bases de W .

- (b) Encontre as matrizes de mudança da base B para a base C e da base C para a base B .

- (c) Encontre uma base D de W , tal que a matriz

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

seja a matriz de mudança da base D para a base B , isto é, $P = M_D^B$.