$1^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios Álgebra Linear
Espaços Vetoriais

Seções 1.1 e 1.2

Exercício 1 ** Seja $V = \mathbb{R}^2$. V não é um espaço vetorial em relação a nenhum dos dois seguintes pares de operações sobre V:*

(a) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ *e* $\lambda(x, y) = (x, \lambda y)$;

(b) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1, y_1)$ *e* $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$.

Diga, em cada caso, quais dos 8 axiomas não se verificam.

Exercício 2 *(Lei do cancelamento da adição) Mostre que: Se $u, v, w \in V$ e $u + v = u + w$, então $v = w$.*

Exercício 3 *Verifique se em cada um dos itens abaixo o conjunto V com as operações indicadas é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.*

(a) $V = \mathbb{R}^3$, $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ *e* $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$.

(b) $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$, *operações usuais de* $M_2(\mathbb{R})$.

(c) $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x - 2y - 0\}$, *operações usuais de* $\mathbb{R}^2$.

(d) $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(-x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$, *operações usuais de funções.*

(e) $V = \mathcal{P} = \{$*polinômios com coeficientes reais*$\}$, *operações usuais de funções.*

(f) $V = \mathbb{R}^2$, $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (2x_1 - 2y_1, y_1 - x_1)$ *e* $\lambda(x, y) = (3\lambda x, -\lambda x)$.

(g) $V = \mathbb{R}^2$, $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ *e* $\lambda(x, y) = (\lambda x, 0)$.

(h) $V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid y = x, z = w^2\}$, *operações usuais de* $\mathbb{R}^4$.

(i) $V = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 y_2)$ *e* $\lambda(x, y) = (\lambda x, y^{\lambda})$.

Seção 1.3

Exercício 4 *Verifique se em cada um dos itens abaixo o subconjunto W é um subespaço vetorial do espaço vetorial V. Caso não sejam especificadas, as operações são as usuais.*

(a) $V = M_2(\mathbb{R})$, $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -a & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$.

(b) $V = \mathbb{R}^4$, $W = \{(x, x, y, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.

(c) $V = \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, $W = \{p \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \mid p(0) = p(1)\}$.

(d) $V = \mathbb{R}^n$, $W = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0\}$, *onde* $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ *são dados.*

(e) $V = M_{n\times 1}(\mathbb{R})$, $W = \{X \in M_{n\times 1}(\mathbb{R}) \mid AX = 0\}$, *onde* $A \in M_{m\times n}$ *é dada.*

(f) $V = M_n(\mathbb{R})$, $W = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^t = A\}$.

Exercício 5 *Verifique em cada um dos itens abaixo se $V = U \oplus W$.*

(a) $V = \mathbb{R}^2$, $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 0\}$, $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\}$.

(b)* $V = M_3(\mathbb{R})$, $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$, $W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & e \\ f & g & 0 \\ h & i & 0 \end{pmatrix} \mid e, f, g, h, i \in \mathbb{R} \right\}$.

Exercício 6 *Em cada um dos itens abaixo, encontrar os subespaços $U + W$ e $U \cap W$, onde U e W são subespaços do espaço vetorial V indicado.*

(a) $V = \mathbb{R}^2$, $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$, $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 2y\}$.

(b) $V = M_2(\mathbb{R})$, $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$, $W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid c, d \in \mathbb{R} \right\}$.

Seções 1.4 e 1.5

Exercício 7 *Para cada um dos subconjuntos $S \subseteq V$, onde V é o espaço vetorial indicado, encontrar o subespaço gerado por S, isto é, $[S]$.*

(a) $S = \{(1, 0), (2, -1)\}$, $V = \mathbb{R}^2$.

(b) $S = \{(1, 1, 1), (2, 2, 0)\}$, $V = \mathbb{R}^3$.

(c) $S = \{1, t, t^2, 1 + t^3\}$, $V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

(d) $S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, $V = M_2(\mathbb{R})$.

Exercício 8 *Em cada um dos itens abaixo, encontrar os subconjuntos S do espaço vetorial V que geram U, W, $U \cap W$ e $U + W$.*

(a) $U = [(1, 0, 0), (1, 1, 1)]$, $W = [(0, 1, 0), (0, 0, 1)]$ $V = \mathbb{R}^3$.

(b) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\}$, $W = [(1, 3, 0), (0, 4, 6)]$, $V = \mathbb{R}^3$.

(c) $U = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A^t = A\}$, $W = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$, $V = M_2(\mathbb{R})$.

Exercício 9 *Sejam U, V e W os seguintes subespaços do $\mathbb{R}^3$: $U = \{(x, y, z) \mid x = z\}$, $V = \{(x, y, z) \mid x = y = 0\}$ e $W = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\}$. Encontre os subconjuntos S de $\mathbb{R}^3$ que geram esses subespaços. Verifique que $U + V = \mathbb{R}^3$, $U + W = \mathbb{R}^3$ e $V + W = \mathbb{R}^3$. Em algum os casos a soma e direta?*