

Apostila - Álgebra Linear

Liliam Carsava Merighe

12 de fevereiro de 2025

A beleza da matemática só se mostra a seguidores mais pacientes.

Maryam Mirzakhani
(primeira mulher a receber a Medalha Fields)

Sumário

1	Espaços vetoriais	9
1.1	Definição e exemplos	9
1.2	Propriedades	12
1.3	Subespaços vetoriais	14
1.4	Combinações Lineares	17
1.5	Espaços vetoriais finitamente gerados	18
1.6	Exercícios	19
2	Base e dimensão	23
2.1	Dependência linear	23
2.2	Base de um espaço vetorial finitamente gerado	26
2.2.1	Processo prático para determinar uma base de um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$	27
2.3	Dimensão	27
2.3.1	Dimensão da soma de dois subespaços	29
2.4	Coordenadas	31
2.5	Mudança de base	32
2.6	Exercícios	35
3	Transformações lineares	39
3.1	Definição, exemplos e propriedades	39
3.2	Núcleo e Imagem	42
3.3	Isomorfismos e Automorfismos	46
3.4	Operações com transformações lineares / O espaço vetorial $\mathcal{L}(U, V)$	48
3.5	Matriz de uma transformação linear	51
3.6	Algumas transformações do plano no plano	56
3.7	Exercícios	59
	Exercícios Resolvidos	63
4	Espaços com produto interno	69
4.1	Produtos internos	69
4.2	Norma, distância e ortogonalidade	71
4.3	Isometrias	77
4.4	Operadores Auto-Adjuntos	79
4.5	Exercícios	80

5	Diagonalização de operadores lineares	83
5.1	Autovalores e Autovetores	83
5.2	Polinômio característico	84
5.3	Diagonalização de operadores	85
5.4	Exercícios	89
6	Formas bilineares e quadráticas	91
6.1	Formas bilineares	91
6.2	Matriz de uma forma bilinear	92
6.3	Formas bilineares simétricas e antissimétricas	93
6.4	Formas quadráticas	94
6.5	Exercícios	97
	Lista de símbolos e siglas	98
	Referências Bibliográficas	99

Introdução

...

O conteúdo dessa Apostila é baseado nas seguintes referências:

CALLIOLI, C. A. *Álgebra Linear e Aplicações*. São Paulo: Atual, 1997. [[1](#)]

Capítulo 1

Espaços vetoriais

1.1 Definição e exemplos

Antes da primeira definição, que nos acompanhará durante todo o curso, vamos analisar dois conjuntos:

- Conjunto das funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, denotado por $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

Nesse conjunto, a soma de funções é dada por: se $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, então

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \quad \text{e} \quad f + g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}).$$

Já a multiplicação por $\lambda \in \mathbb{R}$: se $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, então

$$(\lambda f)(x) := \lambda f(x) \quad \text{e} \quad \lambda f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}).$$

- Conjunto das matrizes quadradas de ordem n com coeficientes reais, denotado por $M_n(\mathbb{R})$ ou, simplesmente, M_n .

Nesse conjunto, a soma de matrizes é dada por: se $A = (a_{ij})_{n \times n}, B = (b_{ij})_{n \times n} \in M_n$, então

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{n \times n} \quad \text{e} \quad A + B \in M_n.$$

Já a multiplicação por $\lambda \in \mathbb{R}$: se $A = (a_{ij})_{n \times n} \in M_n$, então

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})_{n \times n} \quad \text{e} \quad \lambda A \in M_n.$$

Perguntamos: o que esses conjuntos, com estas estruturas de soma e produto por λ , têm em comum?

Verificamos, a partir das propriedades dos números reais, que dadas $f, g, h \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ quaisquer, são válidos:

1. $f + g = g + f$;
2. $f + (g + h) = (f + g) + h$;
3. Se o representa a função nula, isto é, $o(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então $o + f = f$;
4. A função $-f$, definida por $(-f)(x) = -[f(x)]$ para todo $x \in \mathbb{R}$, é tal que $f + (-f) = o$;
5. $\lambda(\mu f) = (\lambda\mu)f$;
6. $(\lambda + \mu)f = \lambda f + \mu f$;

7. $\lambda(f + g) = \lambda f + \lambda g$;
8. $1f = f$.

Agora, com relação a quaisquer $A, B, C \in M_n$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, também são válidos:

1. $A + B = B + A$;
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$;
3. Se O representa a matriz nula, isto é, $O = (0)_{n \times n}$, então $O + A = A$;
4. Se $A = (a_{ij})_{n \times n}$, então a matriz $-A = (-a_{ij})_{n \times n}$ é tal que $A + (-A) = 0$;
5. $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$;
6. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$;
7. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$;
8. $1A = A$.

Ambos os conjuntos apresentam propriedades algébricas comuns. E eles não são os únicos! Por isso, ao invés de estudar cada um deles separadamente, estudaremos de forma geral.

Definição 1.1.1. Dizemos que um conjunto $V \neq \emptyset$ é um **espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$** quando:

I - Existe uma adição $(u, v) \mapsto u + v$ em V , com as seguintes propriedades:

- EV1.** $u + v = v + u, \forall u, v \in V$ (comutativa);
- EV2.** $u + (v + w) = (u + v) + w, \forall u, v, w \in V$ (associativa);
- EV3.** Existe um elemento $0 \in V$, chamado de elemento neutro, tal que $0 + v = v, \forall v \in V$;
- EV4.** Para cada $u \in V$ existe $v \in V$, chamado de oposto, tal que $u + v = 0$. Denotamos o oposto de u por $-u$.

II - Está definida uma multiplicação

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times V &\rightarrow V \\ (\lambda, u) &\mapsto \lambda u \end{aligned}$$

(multiplicação por escalar), e para esse multiplicação temos:

- EV5.** $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v, \forall v \in V$ e $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$;
- EV6.** $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v, \forall v \in V$ e $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$;
- EV7.** $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v, \forall u, v \in V$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$;
- EV8.** $1u = u, \forall u \in V$.

Observação 1.1.2. O elemento neutro na propriedade EV3 e o elemento oposto (elemento inverso) a $u \in V$, $-u \in V$, da propriedade EV4 são únicos!

Demonstração:

- Qualquer outro $0'$ satisfazendo EV3 nos daria:

$$0' = 0 + 0' = 0' + 0 = 0.$$

- Dado $u \in V$, suponha que existam $v, v' \in V$ tais que $u + v = 0$ e $u + v' = 0$. Teríamos

$$v = v + 0 = v + (u + v') = (v + u) + v' = 0 + v' = v'.$$

□

NOTA: De maneira análoga se define espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ (e também sobre um corpo K qualquer).

Exemplo 1.1.3. $V = \mathbb{R}$ é espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Exemplo 1.1.4. $V = \mathbb{C}$ é espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com a adição usual de $\mathbb{C}$ e a multiplicação

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ (\lambda, z) &\mapsto \lambda z \end{aligned}$$

Exemplo 1.1.5. $V = \mathcal{F}(\mathbb{R})$ e $V = M_n$ são espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ (conforme verificamos na motivação do capítulo).

Exemplo 1.1.6. $V = \mathbb{R}^2$ com a adição

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &\mapsto (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \end{aligned}$$

e a multiplicação por escalar

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\lambda, (x_1, y_1)) &\mapsto (\lambda x_1, \lambda y_1) \end{aligned}$$

é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Pois

$$\text{EV1)} (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_2 + x_1, y_2 + y_1) = (x_2, y_2) + (x_1, y_1).$$

EV2) Vale em cada entrada, então vale no vetor.

EV3) $0 = (0, 0)$ é tal que $(x, y) + (0, 0) = (x, y)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

EV4) Para todo $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, existe $-u := (-x, -y)$ tal que $u + (-u) = 0$.

EV5) Para quaisquer $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\lambda(\mu(x, y)) = \lambda(\mu x, \mu y) = (\lambda(\mu x), \lambda(\mu y)) = ((\lambda\mu)x, (\lambda\mu)y) = (\lambda\mu)(x, y).$$

EV6) Vale em cada entrada, então vale no vetor.

EV7) Vale em cada entrada, então vale no vetor.

EV8) $1 \cdot (x, y) = (1 \cdot x, 1 \cdot y) = (x, y)$, para qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Exemplo 1.1.7. Mais geralmente, $V = \mathbb{R}^n$ é espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com a adição

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ ((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) &\mapsto (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \end{aligned}$$

e a multiplicação por escalar

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (\lambda, (x_1, \dots, x_n)) &\mapsto (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n). \end{aligned}$$

$\mathbb{R}^n$ é o espaço vetorial mais importante. O adjetivo “vetorial” vem justamente do comportamento do conjunto de vetores desse espaço sobre $\mathbb{R}$.

Exemplo 1.1.8. $V = \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$, que é o conjunto dos polinômios reais de grau menor ou igual a n mais o polinômio nulo, é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Exemplo 1.1.9. $V = M_{m \times n}(\mathbb{R})$, que é o conjunto das matrizes $m \times n$ com coeficientes reais, é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Exemplo 1.1.10. Considere $V = (0, +\infty) = \{u \in \mathbb{R} \mid u > 0\}$.

Com as operações usuais de soma e multiplicação em $\mathbb{R}$, V não é um espaço vetorial, visto que não possui elemento neutro para a adição.

No entanto, se definirmos, para $x, y \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$x \oplus y = xy \quad (\text{produto usual}) \quad \text{e} \quad \lambda \odot x = x^\lambda$$

V se torna um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

De fato,

EV1) $x \oplus y = xy = yx = y \oplus x, \forall x, y \in V;$

EV2) $x \oplus (y \oplus z) = x \oplus (yz) = x(yz) = (xy)z = (x \oplus y)z = (x \oplus y) \oplus z, \forall x, y, z \in V;$

EV3) Se $x \in V$, então como $1 \in V$, temos

$$1 \oplus x = 1 \cdot x = x;$$

observe que, neste caso, 1 é o elemento neutro da adição;

EV4) Se $x \in V$, então $x > 0$ e $x^{-1} = \frac{1}{x} \in V$ é tal que

$$x \oplus x^{-1} = x \cdot x^{-1} = x \cdot \frac{1}{x} = 1;$$

EV5) $\lambda \odot (\mu \odot x) = \lambda \odot x^\mu = (x^\mu)^\lambda = x^{\mu\lambda} = x^{\lambda\mu} = (\lambda\mu) \odot x, \forall x \in V \text{ e } \forall \mu, \lambda \in \mathbb{R};$

EV6) $(\lambda + \mu) \odot x = x^{\lambda+\mu} = x^\lambda \cdot x^\mu = x^\lambda \oplus x^\mu = (\lambda \odot x) \oplus (\mu \odot x), \forall x \in V \text{ e } \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R};$

EV7) $\lambda \odot (x \oplus y) = \lambda \odot (xy) = (xy)^\lambda = x^\lambda y^\lambda = (\lambda \odot x) \oplus (\lambda \odot y), \forall x, y \in V \text{ e } \forall \lambda \in \mathbb{R}.$

EV8) $1 \odot x = x^1 = x, \forall x \in V.$

1.2 Propriedades

A partir das 8 propriedades da definição de espaço vetorial, podemos concluir várias outras, conforme veremos a seguir.

Propriedades 1.2.1. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Temos:

1. Para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda 0 = 0$.
2. Para qualquer $u \in V$, $0u = 0$.
3. Se $\lambda u = 0$, então $\lambda = 0$ ou $u = 0$.
4. Para quaisquer $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u \in V$, $(-\lambda)u = \lambda(-u) = -(\lambda u)$.
5. Para qualquer $u \in V$, $-(-u) = u$.
6. Para quaisquer $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e $v \in V$, $(\lambda - \mu)v = \lambda v - \mu v$.
7. Para quaisquer $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u, v \in V$, $\lambda(u - v) = \lambda u - \lambda v$.
8. Se $u + w = v + w$, então $u = v$.
9. Dados $\mu, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ e $v_1, \dots, v_n \in V$, então

$$\mu \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j v_j \right) = \sum_{j=1}^n (\mu \lambda_j) v_j.$$

Demonstração:

1. Temos

$$\lambda 0 \stackrel{EV3}{=} \lambda(0 + 0) \stackrel{EV7}{=} \lambda 0 + \lambda 0.$$

Somando a ambos os lados o vetor $-(\lambda 0)$,

$$0 = -\lambda 0 + \lambda 0 = -\lambda 0 + \lambda 0 + \lambda 0 = \lambda 0.$$

Portanto, $\lambda 0 = 0$.

2. Temos

$$0u = (0 + 0)u \stackrel{EV6}{=} 0u + 0u.$$

Somando $-0u$ a ambos os lados,

$$0 = -0u + 0u = -0u + 0u + 0u = 0u.$$

Portanto, $0u = 0$.

3. Se $\lambda = 0$ não há o que fazer.

Se $\lambda \neq 0$, então existe $\lambda^{-1} \in \mathbb{R}$. Logo,

$$u \stackrel{EV8}{=} 1u = (\lambda^{-1}\lambda)u \stackrel{EV5}{=} \lambda^{-1}(\lambda u) = \lambda^{-1}0 \stackrel{P1}{=} 0.$$

4. Temos

$$\lambda u + (-\lambda)u \stackrel{EV6}{=} (\lambda + (-\lambda))u = 0u \stackrel{P2}{=} 0.$$

Como o elemento inverso é único, segue que

$$-(\lambda u) = (-\lambda)u.$$

Analogamente, utilizando EV7, é possível mostrar que

$$-(\lambda u) = \lambda(-u).$$

5. Em P4, tome $\lambda = -1$.

6. Temos

$$(\lambda - \mu)v = (\lambda + (-\mu))v = \lambda v + (-\mu)v = \lambda v + (-\mu v) = \lambda v - \mu v.$$

7. Análoga à P6.

8. Como $w \in V$, existe $-w \in V$. Assim, somando-se $-w$ de ambos os lados da igualdade,

$$u + w = v + w \Rightarrow u + w - w = v + w - w \Rightarrow u = v.$$

9. É feita por indução, a partir de EV5 e EV7.

□

1.3 Subespaços vetoriais

Definição 1.3.1. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Dizemos que $W \subseteq V$ é um **subespaço vetorial de V** se forem satisfeitas as seguintes condições:

SV1. $0 \in W$;

SV2. Se $u, v \in W$, então $u + v \in W$;

SV3. Se $u \in W$, então $\lambda u \in W$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Observação 1.3.2. Todo subespaço vetorial W de um espaço vetorial V sobre $\mathbb{R}$ é ele próprio um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

De fato, as propriedades comutativa, associativa, distributivas e EV8 são herdadas do próprio espaço vetorial V .

O elemento neutro da adição é um elemento de W por SV1.

Finalmente, se $u \in W$, então $-u = (-1)u \in W$ por SV3.

Exemplo 1.3.3. $W_1 = \{0\}$ e $W_2 = V$ são subespaços vetoriais do espaço vetorial V , chamados de **subespaços vetoriais triviais**.

Exemplo 1.3.4. O conjunto $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

De fato,

SV1) $0 = (0, 0, 0) \in W$, pois $0 - 2 \cdot 0 + 0 = 0$.

SV2) Sejam $u = (x_1, y_1, z_1), v = (x_2, y_2, z_2) \in W$. Temos

$$x_1 - 2y_1 + z_1 = 0, \quad x_2 - 2y_2 + z_2 = 0$$

e

$$u + v = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in W,$$

pois

$$(x_1 + x_2) - 2(y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) = x_1 - 2y_1 + z_1 + x_2 - 2y_2 + z_2 = 0.$$

SV3) Dados $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u \in W$, temos que $\lambda u \in W$, pois

$$\lambda u = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1) \quad \text{e} \quad \lambda x_1 - 2\lambda y_1 + \lambda z_1 = \lambda(x_1 - 2y_1 + z_1) = 0.$$

Exercício 1.3.1. Sejam $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ e $W = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0\}$. Mostre que W é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 1.3.5. O conjunto $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 5\}$ não é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$.

De fato, $0 = (0, 0) \notin W$, pois $0 + 0 = 0 \neq 5$.

Exemplo 1.3.6. Seja $\mathcal{P}_n^* \subset \mathcal{P}_n$, dado por $\mathcal{P}_n^* = \{p(x) \in \mathcal{P}_n \mid p(0) = 0\}$. O conjunto $W = \mathcal{P}_n^*$ é subespaço vetorial de $\mathcal{P}_n$.

SV1) O polinômio nulo se anula em $x = 0$, logo, pertence a $\mathcal{P}_n^*$.

SV2) Sejam $p(x), q(x) \in \mathcal{P}_n^*$, então $p(0) + q(0) = 0$ e, assim, $p(x) + q(x) \in \mathcal{P}_n^*$.

SV3) Sejam $p(x) \in \mathcal{P}_n^*$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então $\lambda p(0) = 0$ e, assim, $\lambda p(x) \in \mathcal{P}_n^*$.

Exemplo 1.3.7. O conjunto das matrizes simétricas de ordem n com coeficientes reais é um subespaço vetorial de $M_n(\mathbb{R})$.

Proposição 1.3.8. Sejam U e W subespaços vetoriais de um espaço vetorial V sobre $\mathbb{R}$. Então $U \cap W$ é subespaço vetorial de V .

Demonstração:

SV1) Como $0 \in U$ e $0 \in W$, então $0 \in U \cap W$.

SV2 e SV3) Se $x, y \in U \cap W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então $x + \lambda y \in U$ e $x + \lambda y \in W$. Portanto, $x + \lambda y \in U \cap W$. □

Nas condições da proposição anterior, uma pergunta natural seria: e $U \cup W$? É subespaço vetorial de V ?

A resposta é não!

Considere, por exemplo, $V = \mathbb{R}^2$, $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$ e $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\}$. Note que $(1, -1) \in U \subset U \cup W$ e $(1, 1) \in W \subset U \cup W$, mas

$$(1, -1) + (1, 1) = (2, 0) \notin U \cup W.$$

Dessa forma, um subespaço $V' \subset V$ que contenha $U \cup W$ deverá conter os vetores da forma $u + w$. Isso motiva a seguinte definição:

Definição 1.3.9. Sejam U e W subespaços vetoriais de um espaço vetorial V . Definimos a **soma** de U e W como

$$U + W = \{u + w \mid u \in U, w \in W\}.$$

Note:

- $U + W = W + U$
- $U + \{0\} = U$
- $U \subset U + W$ e $W \subset U + W$. Logo, $U \cup W \subset U + W$.

Proposição 1.3.10. Sejam U e W subespaços vetoriais de um espaço vetorial V sobre $\mathbb{R}$. Então $U + W$ é subespaço vetorial de V .

Demonstração:

SV1) Como $0 \in U$ e $0 \in W$, então $0 = 0 + 0 \in U + W$.

SV2 e SV3) Sejam $x_1, x_2 \in U + W$, então

$$x_j = u_j + w_j, \quad u_j \in U, \quad w_j \in W, \quad j = 1, 2.$$

Agora, se $\lambda \in \mathbb{R}$, então

$$x_1 + \lambda x_2 = (u_1 + w_1) + \lambda(u_2 + w_2) = u_1 + \lambda u_2 + w_1 + \lambda w_2 \in U + W.$$

□

Definição 1.3.11. Sejam U e W subespaços vetoriais de um espaço vetorial V sobre $\mathbb{R}$. Dizemos que $U + W$ é a **soma direta** de U e W se $U \cap W = \{0\}$. Neste caso, usaremos a notação $U \oplus W$.

Se ainda $U \oplus W = V$, dizemos que U e W são suplementares ou que U é suplementar a W (ou que W é suplementar a U).

Proposição 1.3.12. Sejam U e W subespaços vetoriais de um espaço vetorial V sobre $\mathbb{R}$. Temos $V = U \oplus W$ se, e somente se, para cada $v \in V$ existirem um único $u \in U$ e um único $w \in W$ satisfazendo $v = u + w$.

Demonstração:

($\Rightarrow$) Suponha que $V = U \oplus W$, isto é, $V = U + W$ e $U \cap W = \{0\}$.

Dado $v \in V$, existem $u \in U$ e $w \in W$ tais que $v = u + w$. Queremos mostrar que tal decomposição é única.

Suponha que existam $u' \in U$ e $w' \in W$ tais que $v = u' + w'$. Então

$$u + w = u' + w' \quad \Rightarrow \quad \underbrace{u - u'}_{\in U} = \underbrace{w' - w}_{\in W} \in U \cap W = \{0\}.$$

Logo, $u - u' = w' - w = 0$, ou seja, $u = u'$ e $w = w'$.

($\Leftarrow$) Suponha que para cada $v \in V$ existam um único $u \in U$ e um único $w \in W$ tais que $v = u + w$. É claro que $V = U + W$, resta mostrar que $U \cap W = \{0\}$.

Note que $\{0\} \subseteq U \cap W$ sempre. Vamos mostrar que $U \cap W \subseteq \{0\}$.

Seja $v \in U \cap W$. Então existem um único $u \in U$ e um único $w \in W$ satisfazendo $v = u + w$. Observe que

$$v = u + w = \underbrace{(u + v)}_{\in U} + \underbrace{(w - v)}_{\in W}.$$

Pela unicidade da decomposição, devemos ter

$$u = u + v \quad \text{e} \quad w = w - v,$$

isto é, $v = 0$.

Portanto, $U \cap W = \{0\}$. □

Exemplo 1.3.13. Verifique que $\mathbb{R}^3$ é a soma direta de $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ e $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 0\}$.

Note que U e W são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$ (verifique como exercício).

Vamos mostrar que $\mathbb{R}^3 = U + W$ e $U \cap W = \{0\}$.

Dado $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, podemos escrever

$$(x, y, z) = \underbrace{(x, y, -x - y)}_{\in U} + \underbrace{(0, 0, z + x + y)}_{\in W},$$

logo $\mathbb{R}^3 = U + W$.

Agora, seja $(x, y, z) \in U \cap W$, temos

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad (x, y, z) = (0, 0, 0).$$

Logo, $U \cap W = \{0\}$.

Portanto, $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$.

1.4 Combinações Lineares

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Tomemos um subconjunto $S = \{u_1, \dots, u_n\} \subset V$. Denotamos

$$[S] = \{\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}.$$

Proposição 1.4.1. *Nas condições anteriores, $[S]$ é um subespaço vetorial de V .*

Demonstração:

SV1. $0 \in [S]$, pois $0 = 0 \cdot u_1 + \dots + 0 \cdot u_n$.

SV2 e SV3. Dados $u, v \in [S]$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos

$$u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n \quad \text{e} \quad v = \beta_1 u_1 + \dots + \beta_n u_n.$$

Daí

$$u + \lambda v = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n + \lambda(\beta_1 u_1 + \dots + \beta_n u_n) = (\alpha_1 + \lambda\beta_1)u_1 + \dots + (\alpha_n + \lambda\beta_n)u_n \in [S].$$

□

Definição 1.4.2. $[S]$ é chamado de **subespaço vetorial** de V **gerado** por S .

Cada elemento $v \in [S]$ é uma **combinação linear** de S ou combinação linear de $u_1, \dots, u_n$.

Diz-se também que $u_1, \dots, u_n$ geram $[S]$, ou então que são um sistema de geradores de $[S]$.

Também denota-se $[S] = [u_1, \dots, u_n]$.

Observação 1.4.3. 1. Caso $S = \emptyset$, convencionamos que $[S] = \{0\}$.

2. Caso $S \subset V$ seja infinito, definimos:

$$u \in [S] \Leftrightarrow \exists v_1, \dots, v_t \in S \text{ e } \exists \alpha_1, \dots, \alpha_t \in \mathbb{R} \text{ tal que } u = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_t v_t$$

Proposição 1.4.4. *Sejam S e T subconjuntos de um espaço vetorial V sobre $\mathbb{R}$. Temos:*

- 1.** $S \subset [S]$;
- 2.** Se $S \subset T$, então $[S] \subset [T]$;
- 3.** $[[S]] = [S]$;
- 4.** Se S é um espaço vetorial, então $S = [S]$;
- 5.** $[S \cup T] = [S] + [T]$.

Demonstração:

1. Se $u \in S$, então $u = 1 \cdot u \in [S]$.

2. Se $u \in [S]$, então existem $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ e $u_1, \dots, u_n \in S$ tais que

$$u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n.$$

Como $S \subset T$, temos $u_1, \dots, u_n \in T$ e, portanto, $u \in [T]$.

3. Pelo item 1, $[S] \subseteq [[S]]$. Agora, seja $u \in [[S]]$, então u é uma combinação linear de elementos de $[S]$. Mas como cada elemento de $[S]$ é uma combinação linear de elementos de S , resulta que u é uma combinação linear de elementos de S , ou seja, $u \in [S]$.

4. Pelo item 1, $S \subseteq [S]$. Agora, seja $u \in [S]$, então u é uma combinação linear de elementos de S . Como S é espaço vetorial, esta combinação linear é um elemento de S .

5. Seja $u \in [S \cup T]$, então existem $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbb{R}$, $u_1, \dots, u_n \in S$ e $v_1, \dots, v_m \in T$ tais que

$$u = (\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n) + (\beta_1 v_1 + \dots + \beta_m v_m) \in [S] + [T].$$

Reciprocamente, se $u \in [S] + [T]$, então $u = v + w$, com $v \in [S]$ e $w \in [T]$. Dessa forma, existem $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q \in \mathbb{R}$, $v_1, \dots, v_p \in S$ e $w_1, \dots, w_q \in T$ tais que

$$u = v + w = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p + \beta_1 w_1 + \dots + \beta_q w_q \in [S \cup T].$$

□

Exemplo 1.4.5. Sejam $V = \mathbb{R}^2$ e $S = \{(3, 0)\} \subset \mathbb{R}^2$. Temos

$$\begin{aligned} [S] &= [(3, 0)] = \{\alpha \cdot (3, 0); \alpha \in \mathbb{R}\} = \{(3\alpha, 0); \alpha \in \mathbb{R}\} = \{(x, 0); x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}. \end{aligned}$$

Exemplo 1.4.6. Sejam $V = \mathbb{R}^3$ e $S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$. Temos

$$[S] = \{\alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 0) + \gamma(0, 0, 1); \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^3.$$

1.5 Espaços vetoriais finitamente gerados

No exemplo 1.4.6, podemos dizer que os vetores de S geram o $\mathbb{R}^3$. Podemos observar também que muitos outros subconjuntos finitos do $\mathbb{R}^3$ tem essa mesma propriedade.

Definição 1.5.1. Dizemos que um espaço vetorial V , sobre $\mathbb{R}$, é **finitamente gerado** se existir um subconjunto finito $S \subset V$ tal que $V = [S]$.

Exemplo 1.5.2. $\mathbb{R}^n$ é gerado por $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ..., $e_n = (0, \dots, 0, 1)$.

Exemplo 1.5.3. $\mathcal{P}_n(\mathbb{R}) = [1, x, \dots, x^n]$.

Exemplo 1.5.4. $M_2(\mathbb{R})$ é finitamente gerado. O conjunto

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

gera $M_2(\mathbb{R})$.

Exemplo 1.5.5. $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ é gerado pelas matrizes $E_{k\ell} = (\delta_{i,j}^{(k,\ell)})$, $k = 1, \dots, m$, $\ell = 1, \dots, n$, onde

$$\delta_{i,j}^{(k,\ell)} = \begin{cases} 1, & \text{se } (i, j) = (k, \ell) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Exemplo 1.5.6. Seja $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ o espaço vetorial formado por todos os polinômios. $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ não é finitamente gerado.

Se $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ fosse finitamente gerado, existiriam polinômios $p_1(x), \dots, p_n(x)$ tais que $\mathcal{P}(\mathbb{R}) = [p_1(x), \dots, p_n(x)]$. Seja N o grau mais alto dentre os polinômios $p_1(x), \dots, p_n(x)$. É claro que x^{N+1} não pode ser escrito como combinação linear de $p_1(x), \dots, p_n(x)$ e, assim, $x^{N+1} \notin [p_1(x), \dots, p_n(x)] = \mathcal{P}(\mathbb{R})$. O que é uma contradição.

Note que $\mathcal{P}(\mathbb{R}) = [1, x, x^2, \dots]$.

Exemplo 1.5.7. Sejam $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z + t = 0\}$ e $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z - t = 0\}$. Encontre um conjunto de geradores para U , V e $U \cap V$.

Se $(x, y, z, t) \in U$, então $y = x + z + t$ e, assim,

$$(x, y, z, t) = (x, x + z + t, z, t) = x(1, 1, 0, 0) + z(0, 1, 1, 0) + t(0, 1, 0, 1)$$

isto é,

$$U = [(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 1)].$$

De modo análogo,

$$V = [(1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1)].$$

Se $(x, y, z, t) \in U \cap V$, então

$$\begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ x + y + z - t = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -z \text{ e } y = t.$$

Desse modo,

$$(x, y, z, t) = (x, y, -x, y) = x(1, 0, -1, 0) + y(0, 1, 0, 1)$$

e, portanto,

$$U \cap V = [(1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, 1)].$$

1.6 Exercícios

Seções 1.1 e 1.2

Exercício 1.1. * Seja $V = \mathbb{R}^2$. V não é um espaço vetorial em relação a nenhum dos dois seguintes pares de operações sobre V :

(a) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ e $\lambda(x, y) = (x, \lambda y)$;

(b) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1, y_1)$ e $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$.

Diga, em cada caso, quais dos 8 axiomas não se verificam.

Exercício 1.2. (Lei do cancelamento da adição) Mostre que: Se $u, v, w \in V$ e $u + v = u + w$, então $v = w$.

Exercício 1.3. Verifique se em cada um dos itens abaixo o conjunto V com as operações indicadas é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

(a) $V = \mathbb{R}^3$, $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ e $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$.

(b) $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$, operações usuais de $M_2(\mathbb{R})$.

(c) $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x - 2y = 0\}$, operações usuais de $\mathbb{R}^2$.

(d) $V = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(-x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$, operações usuais de funções.

(e) $V = \mathcal{P} = \{\text{polinômios com coeficientes reais}\}$, operações usuais de funções.

(f) $V = \mathbb{R}^2$, $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (2x_1 - 2y_1, y_1 - x_1)$ e $\lambda(x, y) = (3\lambda x, -\lambda x)$.

(g) $V = \mathbb{R}^2$, $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ e $\lambda(x, y) = (\lambda x, 0)$.

(h) $V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid y = x, z = w^2\}$, operações usuais de $\mathbb{R}^4$.

(i) $V = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 y_2)$ e $\lambda(x, y) = (\lambda x, y^\lambda)$.

Seção 1.3

Exercício 1.4. Verifique se em cada um dos itens abaixo o subconjunto W é um subespaço vetorial do espaço vetorial V . Caso não sejam especificadas, as operações são as usuais.

(a) $V = M_2(\mathbb{R})$, $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -a & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$.

(b) $V = \mathbb{R}^4$, $W = \{(x, x, y, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.

(c) $V = \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, $W = \{p \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \mid p(0) = p(1)\}$.

(d) $V = \mathbb{R}^n$, $W = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0\}$, onde $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ são dados.

(e) $V = M_{n \times 1}(\mathbb{R})$, $W = \{X \in M_{n \times 1}(\mathbb{R}) \mid AX = 0\}$, onde $A \in M_{m \times n}$ é dada.

(f) $V = M_n(\mathbb{R})$, $W = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^t = A\}$.

Exercício 1.5. Verifique em cada um dos itens abaixo se $V = U \oplus W$.

(a) $V = \mathbb{R}^2$, $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 0\}$, $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\}$.

(b)* $V = M_3(\mathbb{R})$, $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$, $W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & e \\ f & g & 0 \\ h & i & 0 \end{pmatrix} \mid e, f, g, h, i \in \mathbb{R} \right\}$.

Exercício 1.6. Em cada um dos itens abaixo, encontrar os subespaços $U + W$ e $U \cap W$, onde U e W são subespaços do espaço vetorial V indicado.

(a) $V = \mathbb{R}^2$, $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$, $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 2y\}$.

(b) $V = M_2(\mathbb{R})$, $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$, $W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid c, d \in \mathbb{R} \right\}$.

Seções 1.4 e 1.5

Exercício 1.7. Para cada um dos subconjuntos $S \subseteq V$, onde V é o espaço vetorial indicado, encontrar o subespaço gerado por S , isto é, $[S]$.

(a) $S = \{(1, 0), (2, -1)\}$, $V = \mathbb{R}^2$.

(b) $S = \{(1, 1, 1), (2, 2, 0)\}$, $V = \mathbb{R}^3$.

(c) $S = \{1, t, t^2, 1 + t^3\}$, $V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

(d) $S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, $V = M_2(\mathbb{R})$.

Exercício 1.8. Em cada um dos itens abaixo, encontrar os subconjuntos S do espaço vetorial V que geram U , W , $U \cap W$ e $U + W$.

(a) $U = [(1, 0, 0), (1, 1, 1)]$, $W = [(0, 1, 0), (0, 0, 1)]$, $V = \mathbb{R}^3$.

(b) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\}$, $W = [(1, 3, 0), (0, 4, 6)]$, $V = \mathbb{R}^3$.

(c) $U = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A^t = A\}$, $W = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$, $V = M_2(\mathbb{R})$.

Exercício 1.9. Sejam U , V e W os seguintes subespaços do $\mathbb{R}^3$: $U = \{(x, y, z) \mid x = z\}$, $V = \{(x, y, z) \mid x = y = 0\}$ e $W = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\}$. Encontre os subconjuntos S de $\mathbb{R}^3$ que geram esses subespaços. Verifique que $U + V = \mathbb{R}^3$, $U + W = \mathbb{R}^3$ e $V + W = \mathbb{R}^3$. Em algum os casos a soma é direta?

Capítulo 2

Base e dimensão

2.1 Dependência linear

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Definição 2.1.1. Dizemos que um conjunto $L = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subset V$ é **linearmente independente** (L.I.) se a combinação linear $\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n = 0$, com $\alpha_i \in \mathbb{R}$, só for satisfeita quando $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

Definição 2.1.2. Dizemos que um conjunto $L = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \subset V$ é **linearmente dependente** (L.D.) se não for L.I., ou seja, se é possível encontrar números reais $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ não todos nulos tais que $\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n = 0$.

Observação 2.1.3. Convencionaremos que o conjunto vazio ($\emptyset \subset V$) é L.I..

Exemplo 2.1.4. O conjunto $L = \{(1, 1, 0, 0), (0, 2, 1, 0), (0, 0, 0, 3)\} \subset \mathbb{R}^4$ é L.I..

Pois, se

$$\alpha(1, 1, 0, 0) + \beta(0, 2, 1, 0) + \gamma(0, 0, 0, 3) = (0, 0, 0, 0),$$

então

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha + 2\beta = 0 \\ \beta = 0 \\ 3\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Exemplo 2.1.5. O conjunto $\{1, x, x^2, 2 + x + 2x^2\} \subset P_3(\mathbb{R})$ é L.D..

Pois, se

$$\alpha \cdot 1 + \beta \cdot x + \gamma \cdot x^2 + \delta \cdot (2 + x + 2x^2) = 0$$

então

$$\alpha + 2\delta + (\beta + \delta)x + (\gamma + 2\delta)x^2 = 0.$$

Pelo princípio de igualdade de polinômios, temos

$$\begin{cases} \alpha + 2\delta = 0 \\ \beta + \delta = 0 \\ \gamma + 2\delta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -2\delta \\ \beta = -\delta \\ \gamma = -2\delta \end{cases}$$

que admite outras soluções, além da trivial.

Portanto, o conjunto é L.D..

Vejamos, agora, algumas propriedades da dependência linear.

Propriedades 2.1.6. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

- P1.** Se um conjunto finito $S \subset V$ contém o vetor nulo, então S é L.D..
- P2.** Se $S = \{u\} \subset V$ e $u \neq 0$, então S é L.I..
- P3.** Se $S = \{u_1, \dots, u_n\} \subset V$ é L.D., então um de seus vetores é combinação linear dos outros.
- P4.** Se S_1 e S_2 são subconjuntos finitos e não vazios de V , se $S_1 \subset S_2$ e S_1 é L.D., então S_2 também é L.D..
- P5.** Se S_1 e S_2 são subconjuntos finitos e não vazios de V , se $S_1 \subset S_2$ e S_2 é L.I., então S_1 também é L.I..
- P6.** Se $S = \{u_1, \dots, u_n\}$ é L.I. e para um certo $u \in V$ tivermos $S \cup \{u\}$ L.D., então $u \in [S]$.
- P7.** Se $S = \{u_1, \dots, u_j, \dots, u_n\}$ e $u_j \in [S - \{u_j\}]$, então $[S] = [S - \{u_j\}]$.
- P8.** Se $S = \{u_1, \dots, u_n\}$ é L.I., então cada $v \in [S]$ se escreve de maneira única.

Demonstração:

P1. Faça como exercício.

P2. Suponhamos $\alpha u = 0$. Como $u \neq 0$, então $\alpha = 0$ conforme já vimos nas propriedades de espaços vetoriais (Propriedade 1.2.1 item 3).

P3. Por hipótese, existem $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, nem todos iguais a zero, de modo que

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n = 0.$$

Suponha que $\alpha_1 \neq 0$, então existe $\alpha_1^{-1} \in \mathbb{R}$. Multiplicando a igualdade acima por esse inverso, teremos

$$u_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} u_2 + \dots + \frac{\alpha_n}{\alpha_1} u_n = 0 \Rightarrow u_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} u_2 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} u_n$$

o que mostra que u_1 é combinação linear de $u_2, \dots, u_n$.

Procedemos de modo análogo quando $\alpha_j \neq 0$.

P4. Suponhamos $S_1 = \{u_1, \dots, u_r\}$ e $S_2 = \{u_1, \dots, u_r, u_{r+1}, \dots, u_t\}$. Por hipótese, existem $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R}$, não todos nulos, tais que

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_r u_r = 0.$$

Daí,

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_r u_r + 0u_{r+1} + \dots + 0u_t = 0.$$

Como nem todos os escalares que aparecem nesta última igualdade são nulos, segue que S_2 é L.D..

P5. Se S_1 fosse L.D., o mesmo aconteceria com S_2 (devido à P4). Portanto, S_1 é L.I..

P6. Por hipótese, existem $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha \in \mathbb{R}$, não todos nulos, tais que

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n + \alpha u = 0.$$

Afirmção: $\alpha \neq 0$.

De fato, se $\alpha = 0$, teríamos $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = 0$. Como S é L.I., então $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. Daí, se $\alpha = 0$, então $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = \alpha = 0$, o que é uma contradição.

Sendo $\alpha \neq 0$, existe $\alpha^{-1} \in \mathbb{R}$ e, assim,

$$u = -\frac{\alpha_1}{\alpha} u_1 - \cdots - \frac{\alpha_n}{\alpha} u_n.$$

Portanto, $u \in [S]$.

P7. Vamos supor, sem perda de generalidade, que $j = 1$.

Claramente, $[S - \{u_1\}] \subseteq [S]$, pois $S - \{u_1\} \subseteq S$.

Por outro lado, dado um vetor $u \in [S]$, temos

$$u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n \quad (\alpha_i \in \mathbb{R}). \quad (\text{I})$$

Porém, $u_1 \in [S - \{u_1\}]$, por hipótese, então

$$u_1 = \beta_2 u_2 + \cdots + \beta_n u_n \quad (\beta_i \in \mathbb{R}). \quad (\text{II})$$

Substituindo (II) em (I),

$$u = \alpha_1(\beta_2 u_2 + \cdots + \beta_n u_n) + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n.$$

Daí

$$u = (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2) u_2 + \cdots + (\alpha_1 \beta_n + \alpha_n) u_n \in [S - \{u_1\}].$$

Logo, $[S] \subseteq [S - \{u_1\}]$.

Portanto, vale a igualdade $[S] = [S - \{u_1\}]$.

P8. Basta mostrar que se

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = v = \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_n u_n$$

então $\alpha_j = \beta_j$, $j = 1, \dots, n$.

Temos

$$(\alpha_1 - \beta_1) u_1 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n) u_n = 0$$

e, como S é L.I., então $\alpha_j - \beta_j = 0$, isto é, $\alpha_j = \beta_j$, para todo $j = 1, \dots, n$.

□

Exemplo 2.1.7. (Exemplo de uso da propriedade P7)

Considere o seguinte subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$:

$$S = [(1, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 2), (0, 0, 1, 0), (0, 2, -1, 4)].$$

Note que

$$(0, 2, -1, 4) = 2(0, 1, 0, 2) - (0, 0, 1, 0).$$

A propriedade P7 nos garante, então, que

$$S = [(1, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 2), (0, 0, 1, 0)].$$

2.2 Base de um espaço vetorial finitamente gerado

Definição 2.2.1. Seja V um espaço vetorial finitamente gerado sobre $\mathbb{R}$ e $B \subset V$ um subconjunto finito. B é **base** de V , se:

- (a) $[B] = V$;
- (b) B é L.I..

Exemplo 2.2.2. $V = \mathbb{R}^2$, $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$. B é uma base de V .

Mais geralmente,

Exemplo 2.2.3. $B = \{(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 0, 1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^n$. Essa base é chamada de **base canônica** do $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 2.2.4. $V = \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, $B = \{1, x, \dots, x^n\}$. B é uma base de V . Essa base é chamada de base canônica de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$.

Exemplo 2.2.5. $V = \mathbb{C}$, $B = \{1, i\}$. B é uma base de V .

Observação 2.2.6. Existe mais de uma base para o mesmo espaço vetorial.

Teorema 2.2.7. *Todo espaço vetorial finitamente gerado sobre $\mathbb{R}$ admite uma base.*

Demonstração:

Seja V o nosso espaço vetorial finitamente gerado sobre $\mathbb{R}$. Dividiremos a prova em duas etapas.

Se $V = \{0\}$, então $B = \emptyset$ é base de V , pois

- (a) $\emptyset$ é L.I. (por convenção);
- (b) $[\emptyset] = \{0\}$.

Suponhamos, agora, que $V \neq \{0\}$. Como V é finitamente gerado, existe $S \subseteq V$ finito, $S \neq \emptyset$, tal que $V = [S]$. Como S é finito e não-vazio, existem subconjuntos finitos L.I. e não-vazios de S . Tomemos um deles com o maior número possível de elementos e indiquemos por B .

Afirmção: B é base de V .

De fato,

- (a) B é L.I., pela escolha de B .
- (b) $V = [B]$, pois:
 $[B] \subseteq V$, já que $B \subseteq V$.

Para a outra inclusão, note que para qualquer $u \in S - B$, $B \cup \{u\}$ é L.D.. Logo, pela propriedade 2.1.6 item P6, $u \in [B]$. Daí,

$$S = (S - B) \cup B \subset [B].$$

Então

$$V = [S] \subset [[B]] = [B].$$

Logo, $V = [B]$.

Portanto, o resultado segue. □

2.2.1 Processo prático para determinar uma base de um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$

Nesta seção, veremos um dispositivo prático para achar uma base de um subespaço de $\mathbb{R}^n$ a partir dos seus geradores.

Seja $V = [u_1, \dots, u_r]$ um subespaço do espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}$. Esse processo se baseia em três observações:

- (I) Permutar dois vetores não altera o subespaço gerado.
- (II) Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se a igualdade:

$$V = [u_1, \dots, u_i, \dots, u_j + \alpha u_i, \dots, u_r].$$

- (III) Se $u_1, \dots, u_r$ se apresentam na forma escalonada, ou seja, se o número de zeros iniciais de u_2 é maior do que o de u_1 e assim sucessivamente, então $\{u_1, \dots, u_r\}$ é L.I..

Exemplo 2.2.8. Seja $V = [(2, 1, 1, 0), (1, 0, 1, 2), (0, -1, 1, 4)] \subset \mathbb{R}^4$. Na prática, formamos com esses vetores as linhas de uma matriz simbólica e aplicamos as “operações” (I) e (II) até obtermos a situação da hipótese de (III):

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} &\xrightarrow{L1 \leftrightarrow L2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{(-2)L1 + L2 \rightarrow L2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{L2 + L3 \rightarrow L3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Temos então

$$V = [(1, 0, 1, 2), (0, 1, -1, -4), (0, 0, 0, 0)].$$

Como o vetor nulo pode ser retirado do segundo membro dessa última igualdade, então

$$V = [(1, 0, 1, 2), (0, 1, -1, -4)].$$

Levando em conta (III), concluimos que $\{(1, 0, 1, 2), (0, 1, -1, -4)\}$ é uma base de V .

2.3 Dimensão

Teorema 2.3.1 (Teorema da Invariância). *Em um espaço vetorial $V \neq \{0\}$ finitamente gerado toda base possui o mesmo número de elementos.*

Demonstração:

Sejam $\{u_1, \dots, u_n\}$ e $\{v_1, \dots, v_m\}$ bases de V . Suponhamos que $n > m$ e mostremos que isto implicará que $\{u_1, \dots, u_n\}$ é L.D., o que contraria o fato de ser uma base.

Como $\{v_1, \dots, v_m\}$ gera V , podemos escrever

$$u_j = \alpha_{1j}v_1 + \dots + \alpha_{mj}v_m,$$

para cada $1 \leq j \leq n$. Assim,

$$\begin{aligned} x_1u_1 + \dots + x_nu_n = 0 &\Leftrightarrow x_1 \left(\sum_{i=1}^m \alpha_{i1}v_i \right) + \dots + x_n \left(\sum_{i=1}^m \alpha_{in}v_i \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\sum_{j=1}^n x_j \alpha_{1j} \right) v_1 + \dots + \left(\sum_{j=1}^n x_j \alpha_{mj} \right) v_m = 0 \end{aligned}$$

Como $\{v_1, \dots, v_m\}$ é L.I., então $\sum_{j=1}^n x_j \alpha_{ij} = 0$, para todo $1 \leq i \leq m$. Estas m equações representam um sistema linear homogêneo com n incógnitas. Como $n > m$, existe uma solução não trivial, isto é, uma solução $x_1, \dots, x_n$ onde pelo menos um $x_j \neq 0$. Assim, $\{u_1, \dots, u_n\}$ é L.D., o que é uma contradição. $\square$

A partir deste teorema, temos a seguinte definição.

Definição 2.3.2. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ finitamente gerado. Denomina-se **dimensão** de V ($\dim V$) o número de elementos de uma base qualquer de V .

Diz-se, neste caso, que V é um **espaço vetorial de dimensão finita**.

Note: se $V = \{0\}$, definimos $\dim V = 0$.

Definição 2.3.3. Se um espaço vetorial não é finitamente gerado, dizemos que possui **dimensão infinita**.

Exemplo 2.3.4. Com base no que já foi feito e visto anteriormente,

- 1) $\dim \mathbb{R}^n = n$.
- 2) $\dim \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) = n + 1$.
- 3) $\dim M_{m \times n}(\mathbb{R}) = m \cdot n$.
- 4) $\dim P(\mathbb{R}) = \infty$.

Teorema 2.3.5 (Teorema do Completamento). *Seja V um espaço vetorial de dimensão n . Se $\{u_1, \dots, u_r\} \subset V$ é um subconjunto L.I. e $r < n$, então existem $u_{r+1}, \dots, u_n \in V$ tais que $\{u_1, \dots, u_r, u_{r+1}, \dots, u_n\}$ é uma base de V .*

Demonstração:

Como $r < n$, existe $u_{r+1} \in V$ tal que $\{u_1, \dots, u_r, u_{r+1}\}$ é L.I., pois caso contrário $\{u_1, \dots, u_r\}$ formaria uma base de V , o que é impossível pois $\dim V = n > r$.

Se $r + 1 = n$, então $\{u_1, \dots, u_r, u_{r+1}\}$ é uma base de V .

Se $r + 1 < n$, então existe $u_{r+2} \in V$ tal que $\{u_1, \dots, u_r, u_{r+1}, u_{r+2}\}$ é L.I., pois caso contrário $\{u_1, \dots, u_r, u_{r+1}\}$ seria uma base de V , o que é impossível pois $\dim V = n > r + 1$.

Repetindo os argumentos acima, encontramos $u_{r+1}, u_{r+2}, \dots, u_{r+k} \in V$, onde $r + k = n$, de forma que $B = \{u_1, \dots, u_r, u_{r+1}, \dots, u_{r+k}\}$ são L.I. e, como $\dim V = n = r + k$, segue que B é base de V . $\square$

Proposição 2.3.6. *Todo subespaço vetorial de um espaço vetorial finitamente gerado é também finitamente gerado.*

Demonstração:

Seja V um espaço vetorial finitamente gerado e $W \subset V$ um subespaço vetorial.

Se $W = \{0\}$, não há nada a provar.

Se $W \neq \{0\}$, tomemos $w_1 \in W$, $w_1 \neq 0$. Se $W = [w_1]$, está provado. Senão, existe $w_2 \in W$ que não é da forma $\lambda_1 w_1$, isto é, $\{w_1, w_2\}$ é L.I.. Se $W = [w_1, w_2]$ está terminado. Senão, existe $w_3 \in W$ tal que $w_3 \notin [w_1, w_2]$. E assim por diante. Esse processo deve parar, senão haveria em V um conjunto L.I. e infinito. $\square$

Proposição 2.3.7. *Seja W um subespaço vetorial de um espaço vetorial finitamente gerado V . Se $\dim W = \dim V$, então $W = V$.*

Demonstração:

Pela proposição anterior, W é finitamente gerado. Logo, W tem uma base. Como $\dim V = \dim W$, toda base de W também é base de V . Logo, todo vetor de V pertence a W , ou seja, $V \subseteq W$.

Portanto, $V = W$. $\square$

2.3.1 Dimensão da soma de dois subespaços

Teorema 2.3.8. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Se U e W são subespaços vetoriais de V , então*

$$\dim(U \cap W) + \dim(U + W) = \dim U + \dim W.$$

Demonstração:

Seja $B_1 = \{v_1, \dots, v_m\}$ uma base de $U \cap W$. Como B_1 é L.I. em U e em W , o Teorema do Completamento nos garante que existem $u_1, \dots, u_p \in U$ e $w_1, \dots, w_q \in W$ tais que $B_2 = \{v_1, \dots, v_m, u_1, \dots, u_p\}$ é base de U e $B_3 = \{v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_q\}$ é base de W .

Note que, com a notação usada,

$$\dim(U \cap W) = m, \quad \dim U = m + p, \quad \text{e} \quad \dim W = m + q.$$

Afirmção: $B = \{v_1, \dots, v_m, u_1, \dots, u_p, w_1, \dots, w_q\}$ é base de $U + W$.

(a) $U + W = [B]$.

Seja $v \in U + W$. Então $v = u + w$, com $u \in U$ e $w \in W$. Sendo B_2 e B_3 bases de U e W , respectivamente, temos

$$u = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_p u_p$$

e

$$w = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m + \gamma_1 w_1 + \dots + \gamma_q w_q$$

com $\alpha_i, \beta_j, \lambda_\ell, \gamma_k \in \mathbb{R}$.

Daí

$$v = u + w = (\alpha_1 + \lambda_1)v_1 + \dots + (\alpha_m + \lambda_m)v_m + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_p u_p + \gamma_1 w_1 + \dots + \gamma_q w_q \in [B].$$

Logo, $[B] = U + W$.

(b) B é L.I..

Suponhamos que

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_p u_p + \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_q w_q + \delta_1 v_1 + \cdots + \delta_m v_m = 0, \quad (\star)$$

ou seja,

$$\underbrace{\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_p u_p + \delta_1 v_1 + \cdots + \delta_m v_m}_{\in U} = \underbrace{-\beta_1 w_1 - \cdots - \beta_q w_q}_{\in W}.$$

Logo,

$$-\beta_1 w_1 - \cdots - \beta_q w_q \in U \cap W = [v_1, \dots, v_m].$$

Assim, existem $\gamma_1, \dots, \gamma_m \in \mathbb{R}$ tais que

$$-\beta_1 w_1 - \cdots - \beta_q w_q = \gamma_1 v_1 + \cdots + \gamma_m v_m,$$

ou seja,

$$\beta_1 w_1 + \cdots + \beta_q w_q + \gamma_1 v_1 + \cdots + \gamma_m v_m = 0.$$

Como B_3 é L.I., segue que $\beta_1 = \cdots = \beta_q = \gamma_1 = \cdots = \gamma_m = 0$. Assim, a equação $(\star)$ se reduz a

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_p u_p + \delta_1 v_1 + \cdots + \delta_m v_m = 0.$$

Como B_2 é L.I., segue que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_p = \delta_1 = \cdots = \delta_m = 0$. Assim, B é L.I.

Portanto, $\dim(U + W) = m + p + q$ e então vale

$$\dim(U + W) + \dim(U \cap W) = \dim U + \dim W.$$

□

Exemplo 2.3.9. Considere os seguintes subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^4$:

$$U = [(1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0)] \quad \text{e} \quad W = \{(x, y, z, t) \mid x + y = 0\}.$$

Determine $\dim(U \cap W)$ e $\dim(U + W)$.

• Note que $B = \{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0)\}$ é base de U (faça como exercício). Logo, $\dim U = 2$.

• Quanto a W , temos

$$\begin{aligned} w \in W &\Leftrightarrow w = (x, -x, z, t), \quad \text{onde } x, z, t \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow w = x(1, -1, 0, 0) + z(0, 0, 1, 0) + t(0, 0, 0, 1). \end{aligned}$$

Logo,

$$W = [(1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)].$$

Assim, $C = \{(1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ é uma base de W (mostre como exercício que é L.I.) e $\dim W = 3$.

• Para $U + W$, decorre da própria definição de soma de subespaços que $U + W = [B \cup C]$. A partir disso, podemos achar uma base de $U + W$ do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-L1+L5 \rightarrow L5} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{L2+L5 \rightarrow L5} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L3+L5 \rightarrow L5} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Logo,

$$U + W = [(1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)]$$

e $\dim(U + W) = 4$. Consequentemente, $U + W = \mathbb{R}^4$.

- $\dim(U \cap W) = 2 + 3 - 4 = 1$.

2.4 Coordenadas

Vamos trabalhar a partir de agora com **bases ordenadas** de um espaço vetorial V sobre $\mathbb{R}$, que são aquelas nas quais fixamos quem é o primeiro vetor, quem é o segundo vetor, e assim por diante. A fim de simplificação, diremos apenas “base” ao invés de “base ordenada”, porém estaremos assumindo sempre que temos a ordenação.

Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ uma base de V , então todo elemento de $v \in V$ se escreve como

$$v = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n,$$

com $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$. Pela Propriedade 2.1.6 P8, os coeficientes $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ são unicamente determinados. Esses escalares são denominados **coordenadas** de v **com relação à base B** .

Representamos as coordenadas de v com relação à base B como

$$v_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}_B \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix},$$

o segundo modo quando não houver possibilidade de confusão. Essa matriz é chamada de **matriz das coordenadas** de v em relação à base B .

Note: se a base não fosse ordenada, não saberíamos qual seria o α_1 , o α_2 e etc..

Exemplo 2.4.1. Mostre que $B = \{1, 1 + t, 1 + t^2\}$ é uma base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Encontre as coordenadas de $f(t) = 2 + 4t + t^2$ em relação à B .

A verificação de que B é base é simples e fica como exercício.

Agora, seja

$$2 + 4t + t^2 = \alpha \cdot 1 + \beta(1 + t) + \gamma(1 + t^2)$$

vamos encontrar α , β e γ . Temos

$$\begin{aligned} 2 + 4t + t^2 &= (\alpha + \beta + \gamma) + \beta t + \gamma t^2 \\ \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 2 \\ \beta = 4 \\ \gamma = 1 \end{cases} &\Rightarrow \alpha = -3, \quad \beta = 4 \quad \text{e} \quad \gamma = 1 \end{aligned}$$

Portanto, a matriz das coordenadas de $f(t)$ em relação a B é $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ainda no exemplo, note que as coordenadas de $f(t)$ em relação à base canônica $C = \{1, t, t^2\}$ são dadas por $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}_C$.

Observe que bases diferentes nos dão coordenadas diferentes para um mesmo elemento.

Pergunta: Há uma relação entre elas?

A resposta é que sim, conforme veremos a seguir.

2.5 Mudança de base

Seja V um espaço vetorial finitamente gerado de dimensão n e consideremos duas bases de V : $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ e $C = \{c_1, \dots, c_n\}$.

Como B é base, existem $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$, $1 \leq i, j \leq n$, tais que

$$\begin{aligned} c_1 &= \alpha_{11}b_1 + \dots + \alpha_{n1}b_n \\ c_2 &= \alpha_{12}b_1 + \dots + \alpha_{n2}b_n \\ &\vdots \\ c_n &= \alpha_{1n}b_1 + \dots + \alpha_{nn}b_n \end{aligned} \quad \text{ou} \quad c_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij}b_i \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

Dessa forma, as coordenadas de $c_1, \dots, c_n$, com relação à base B são, respectivamente,

$$c_{1B} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \vdots \\ \alpha_{n1} \end{pmatrix}_B, c_{2B} = \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \vdots \\ \alpha_{n2} \end{pmatrix}_B, \dots, c_{nB} = \begin{pmatrix} \alpha_{1n} \\ \vdots \\ \alpha_{nn} \end{pmatrix}_B.$$

Definição 2.5.1. A matriz quadrada de ordem n

$$M_B^C = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

cujas colunas são formadas pelas coordenadas de $c_1, \dots, c_n$ com relação à base B , é chamada de **matriz mudança de base** da base B para a base C .

Exemplo 2.5.2. No espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, considere as bases $B = \{(1, 0, 1), (1, 1, 1), (1, 1, 2)\}$ e $C = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$. Encontre M_B^C .

Precisamos encontrar os α_{ij} tais que

$$\begin{aligned} (1, 0, 0) &= \alpha_{11}(1, 0, 1) + \alpha_{21}(1, 1, 1) + \alpha_{31}(1, 1, 2) \\ (0, 1, 0) &= \alpha_{12}(1, 0, 1) + \alpha_{22}(1, 1, 1) + \alpha_{32}(1, 1, 2) \\ (0, 0, 1) &= \alpha_{13}(1, 0, 1) + \alpha_{23}(1, 1, 1) + \alpha_{33}(1, 1, 2) \end{aligned}$$

equivalentemente,

$$\begin{aligned} (\alpha_{11} + \alpha_{21} + \alpha_{31}, \alpha_{21} + \alpha_{31}, \alpha_{11} + \alpha_{21} + 2\alpha_{31}) &= (1, 0, 0) \\ (\alpha_{11} + \alpha_{21} + \alpha_{31}, \alpha_{21} + \alpha_{31}, \alpha_{11} + \alpha_{21} + 2\alpha_{31}) &= (0, 1, 0) \\ (\alpha_{11} + \alpha_{21} + \alpha_{31}, \alpha_{21} + \alpha_{31}, \alpha_{11} + \alpha_{21} + 2\alpha_{31}) &= (0, 0, 1) \end{aligned}$$

Note que cada linha acima representa um sistema de três equações e três incógnitas.

Resolvendo o primeiro sistema:

$$\begin{cases} \alpha_{11} + \alpha_{21} + \alpha_{31} = 1 \\ \alpha_{21} + \alpha_{31} = 0 \\ \alpha_{11} + \alpha_{21} + 2\alpha_{31} = 0 \end{cases} \xrightarrow{L1-L3 \rightarrow L3} \begin{cases} \alpha_{11} + \alpha_{21} + \alpha_{31} = 1 \\ \alpha_{21} + \alpha_{31} = 0 \\ -\alpha_{31} = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{31}) = (1, 1, -1).$$

Resolvendo os outros dois sistemas (faça como exercício), obtemos

$$(\alpha_{12}, \alpha_{22}, \alpha_{32}) = (-1, 1, 0) \quad \text{e} \quad (\alpha_{13}, \alpha_{23}, \alpha_{33}) = (0, -1, 1).$$

Portanto,

$$M_B^C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercício 2.5.1. No exemplo anterior, encontre M_B^C . M_B^C e M_C^B são iguais ou diferentes?

Observação 2.5.3. Se $B = C$, $M_B^C = M_C^B = \text{Id}$.

Pergunta: Existe uma relação entre M_B^C e M_C^B ?

A resposta é que sim! Como veremos a seguir.

Proposição 2.5.4. Sejam B , C e D bases de um espaço vetorial de dimensão n . Então

$$M_B^D = M_B^C \cdot M_C^D.$$

Demonstração:

Sejam $B = \{b_1, \dots, b_n\}$, $C = \{c_1, \dots, c_n\}$ e $D = \{d_1, \dots, d_n\}$. Usando a notação $M_B^C = (\alpha_{ij})$, $M_C^D = (\beta_{jk})$ e $M_B^D = (\gamma_{ik})$, vemos que

$$c_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} b_i, \quad d_k = \sum_{j=1}^n \beta_{jk} c_j, \quad d_k = \sum_{i=1}^n \gamma_{ik} b_i. \quad (\star)$$

Assim,

$$d_k = \sum_{j=1}^n \beta_{jk} c_j = \sum_{j=1}^n \beta_{jk} \left(\sum_{i=1}^n \alpha_{ij} b_i \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \beta_{jk} \right) b_i.$$

Como $\{b_1, \dots, b_n\}$ é L.I., comparando com a última expressão de $(\star)$, obtemos

$$\gamma_{ik} = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \beta_{jk}, \quad 1 \leq i, k \leq n.$$

Resta apenas lembrar que o lado direito da expressão acima representa o elemento da i -ésima linha e da k -ésima coluna da matriz $M_B^C \cdot M_C^D$. Portanto, $M_B^D = M_B^C \cdot M_C^D$. $\square$

Corolário 2.5.5. Sejam B e C bases de um espaço vetorial de dimensão n . Então a matriz M_B^C possui inversa e esta inversa é dada por M_C^B , isto é,

$$(M_B^C)^{-1} = M_C^B.$$

E vice-versa: $(M_C^B)^{-1} = M_B^C$.

Demonstração:

Pela proposição e pela observação anteriores, temos

$$M_B^C \cdot M_C^B = M_B^B = \text{Id}_n \quad \text{e} \quad M_C^B \cdot M_B^C = M_C^C = \text{Id}_n.$$

Portanto, o resultado segue. $\square$

Exemplo 2.5.6. No Exemplo 2.5.2 anterior, encontre M_C^B usando o Corolário 2.5.5.

$$\begin{aligned}
 M_C^B = (M_B^C)^{-1} : & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & | & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \xrightarrow{L1-L2 \rightarrow L2} & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & | & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L1+L3 \rightarrow L3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & | & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \xrightarrow{L2-2L3 \rightarrow L3} & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & | & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L3+L2 \rightarrow L2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & | & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & | & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\
 \xrightarrow{-L2/2 \rightarrow L2} & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & | & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L2+L1 \rightarrow L1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & | & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\
 \xrightarrow{-L3 \rightarrow L3} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$M_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vejamos agora como as coordenadas de um vetor qualquer de um espaço vetorial se relacionam com respeito a duas bases desse espaço.

Sejam $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ e $C = \{c_1, \dots, c_n\}$ bases de um espaço vetorial V de dimensão finita n . Dado $v \in V$, sejam

$$v_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_B \quad \text{e} \quad v_C = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_C$$

as suas coordenadas com relação às bases B e C , respectivamente. Se $M_B^C = (\alpha_{ij})$ representa a matriz de mudança da base B para a base C , então como $c_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} b_i$, $j = 1, \dots, n$, obtemos

$$\sum_{i=1}^n x_i b_i = v = \sum_{j=1}^n y_j c_j = \sum_{j=1}^n y_j \left(\sum_{i=1}^n \alpha_{ij} b_i \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} y_j \right) b_i.$$

Como $\{b_1, \dots, b_n\}$ é L.I., segue que

$$x_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} y_j, \quad i = 1, \dots, n.$$

Estas n equações podem ser escritas na seguinte forma matricial

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

ou

$$v_B = M_B^C \cdot v_C.$$

Resumindo:

Proposição 2.5.7. *Sejam B e C bases de um espaço vetorial V de dimensão finita. Se v_B e v_C representam as coordenadas de um dado vetor $v \in V$ com relação às bases B e C , respectivamente, e se M_B^C é a matriz de mudança de base da base B para a base C , então*

$$v_B = M_B^C \cdot v_C.$$

Exemplo 2.5.8. Em $\mathbb{R}^3$, sejam $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ a matriz de mudança de B para C e

$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ as coordenadas de um vetor u em relação à base C . Determine as coordenadas desse mesmo vetor em relação à base B .

Temos $M_B^C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $u_C = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Assim,

$$u_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2.6 Exercícios

Seção 2.1

Exercício 2.1. * Mostre que $\{0, u_1, \dots, u_n\} \subset V$ é um conjunto L.D., onde 0 é o elemento neutro do espaço vetorial V .

Exercício 2.2. Verifique, em cada um dos itens abaixo, se o subconjunto S do espaço vetorial V é L.I. ou L.D.

(a) $S = \{(1, 2), (-3, 1)\}$, $V = \mathbb{R}^2$.

(b) $S = \{1 + t - t^2, 2 + 5t - 9t^2\}$, $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

(c) $S = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, $V = M_2(\mathbb{R})$.

(d) $S = \{(1, 2, 2, -3), (-1, 4, -2, 0)\}$, $V = \mathbb{R}^4$.

(e) $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 10 & 5 & 7 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$, $V = M_3(\mathbb{R})$.

Exercício 2.3. Mostre que o conjunto $\{1, \sin^2 x, \cos^2 x\}$ de vetores de $C([-\pi, \pi])$ é L.D..

Exercício 2.4. Suponha que $\{v_1, \dots, v_n\}$ é um subconjunto L.I. de um espaço vetorial. Mostre que $\{a_1 v_1, \dots, a_n v_n\}$ também é L.I., desde que os escalares a_i sejam todos não nulos.

Seções 2.2 e 2.3

Exercício 2.5. Verifique se os elementos de $B = \{1 + x, 1 - x, 1 - x^2\}$ formam uma base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

Exercício 2.6. Encontre uma base para o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ dado por $U = [(1, 0, 1), (1, 2, 0), (0, 2, -1)]$.

Exercício 2.7. Mostre que o subconjunto $\{1, i\}$ é uma base de $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$.

Exercício 2.8. * No espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, considere os seguintes subespaços:

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\} \text{ e } V = [(1, 2, 0), (3, 1, 2)].$$

Determine uma base e a dimensão dos subespaços U , V , $U + V$ e $U \cap V$.

Exercício 2.9. Dar uma base e a dimensão do subespaço W de $\mathbb{R}^4$, onde $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y = y \text{ e } x - 3y + t = 0\}$.

Exercício 2.10. No espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, considere os seguintes subespaços:

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}, V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y - 2z = 0\} \text{ e } W = [(1, 1, 0), (0, 0, 2)].$$

Determine uma base e a dimensão dos subespaços: U , V , W , $U \cap V$ e $V + W$ e $U + V + W$.

Seções 2.4 e 2.5

Exercício 2.11. Determine as coordenadas do vetor $u = (-1, 8, 5) \in \mathbb{R}^3$ em relação a cada uma das bases abaixo:

(a) base canônica.

(b) $\{(0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}$.

(c) $\{(1, 2, 1), (0, 3, 2), (1, 1, 4)\}$.

Exercício 2.12. Determine as coordenadas de $p(t) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, dado por $p(t) = 10 + t^2 + 2t^3$, $t \in \mathbb{R}$, em relação às seguintes bases de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$:

(a) base canônica.

(b) $\{1, 1 + t, 1 + t + t^2, 1 + t + t^2 + t^3\}$.

(c) $\{4 + t, 2, 2 - t^2, t + t^3\}$.

Exercício 2.13. Determine as coordenadas do vetor $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -8 & 7 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ em relação às seguintes bases de $M_2(\mathbb{R})$:

(a) base canônica.

(b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Exercício 2.14. * Considere as bases $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ e $C = \{g_1, g_2, g_3\}$ de um espaço vetorial V relacionadas da seguinte forma:

$$\begin{cases} g_1 = e_1 + e_2 - e_3 \\ g_2 = 2e_2 + 3e_3 \\ g_3 = 3e_1 + e_3 \end{cases}$$

- (a) Determine as matrizes mudança da base B para a base C , isto é, M_B^C , e da base C para a base B , isto é, M_C^B .
- (b) Se a matriz das coordenadas do vetor v em relação à base B , isto é, $(v)_B$, é dada por $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ encontre a matriz das coordenadas de v em relação a base C , isto é, $(v)_C$.
- (c) Se a matriz das coordenadas do vetor v em relação à base C , isto é, $(v)_C$, é dada por $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ encontre a matriz das coordenadas de v em relação a base B , isto é, $(v)_B$.

Exercício 2.15. Considere as bases ordenadas $B = \{1, 1+t, 1+t^2\}$ e $C = \{1, t, t^2\}$ de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

- (a) Determine as matrizes mudança da base B para a base C , isto é, M_B^C , e da base C para a base B , isto é, M_C^B .
- (b) Se a matriz das coordenadas do vetor v em relação à base B , isto é, $(v)_B$, é dada por $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$ encontre a matriz das coordenadas de v em relação a base C , isto é, $(v)_C$.
- (c) Se a matriz das coordenadas do vetor v em relação à base C , isto é, $(v)_C$, é dada por $\begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ encontre a matriz das coordenadas de v em relação a base B , isto é, $(v)_B$.

Exercício 2.16. Considere o seguinte subespaço de $M_2(\mathbb{R})$:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid x - y - z = 0 \right\}.$$

- (a) Mostre que B dada pelas matrizes

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e C dada pelas matrizes

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

são bases de W .

- (b) Encontre as matrizes de mudança da base B para a base C e da base C para a base B .
- (c) Encontre uma base D de W , tal que a matriz

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

seja a matriz de mudança da base D para a base B , isto é, $P = M_D^B$.

Capítulo 3

Transformações lineares

Neste capítulo, estudaremos aplicações que nos dão correspondências entre espaços vetoriais.

3.1 Definição, exemplos e propriedades

Definição 3.1.1. Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$. Uma aplicação $T : U \rightarrow V$ é uma **transformação linear** de U em V se, e somente se,

(a) $T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2), \forall u_1, u_2 \in U;$

(b) $T(\alpha u) = \alpha T(u), \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } \forall u \in U.$

No caso em que $U = V$, uma transformação linear $T : U \rightarrow U$ é chamada também de **operador linear**.

Exemplo 3.1.2. $0 : U \rightarrow V$ dada por $0(u) = 0$ (vetor nulo de V), para todo $u \in U$, é uma transformação linear, chamada de **transformação nula**.

De fato,

(a) $0(u_1 + u_2) = 0 = 0 + 0 = 0(u_1) + 0(u_2), \forall u_1, u_2 \in U;$

(b) $0(\alpha u) = 0 = \alpha \cdot 0 = \alpha 0(u), \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } \forall u \in U.$

Exemplo 3.1.3. $I : U \rightarrow U$ dada por $I(u) = u$, para todo $u \in U$, é uma transformação linear, chamada de **transformação identidade** (ou **operador idêntico**).

De fato,

(a) $I(u_1 + u_2) = u_1 + u_2 = I(u_1) + I(u_2), \forall u_1, u_2 \in U;$

(b) $I(\alpha u) = \alpha u = \alpha I(u), \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } \forall u \in U.$

Exemplo 3.1.4. $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y, z) = (x, 2x - z)$, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, é uma transformação linear.

De fato,

(a) Sejam $u_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $u_2 = (x_2, y_2, z_2)$ em $\mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} T(u_1 + u_2) &= T(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) = (x_1 + x_2, 2(x_1 + x_2) - (z_1 + z_2)) \\ &= (x_1, 2x_1 - z_1) + (x_2, 2x_2 - z_2) = T(u_1) + T(u_2). \end{aligned}$$

(b) Dados $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$T(\alpha u) = T(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = (\alpha x, 2\alpha x - \alpha z) = \alpha(x, 2x - z) = \alpha T(u).$$

Exemplo 3.1.5. $T : \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ dada por $T(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ é uma transformação linear.

Faça a justificativa como exercício.

Exemplo 3.1.6. $T : \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ dada por $T(f(t)) = f'(t)$ (derivada de $f(t)$) é uma transformação linear.

De fato, a derivada da soma de dois polinômios é igual à soma das derivadas e a derivada do produto do polinômio por um número é igual a esse número multiplicado pela derivada do polinômio.

Exemplo 3.1.7. $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $T(x, y, z) = x + y + z + 4$ não é uma transformação linear.

De fato, dados $u_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $u_2 = (x_2, y_2, z_2)$ em $\mathbb{R}^3$, temos que

$$T(u_1 + u_2) = x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + z_1 + z_2 + 4$$

enquanto

$$T(u_1) + T(u_2) = x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + z_1 + z_2 + 8.$$

Logo, $T(u_1 + u_2) \neq T(u_1) + T(u_2)$.

Exemplo 3.1.8. $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (y^2, x)$ não é uma transformação linear.

De fato, se $u_1 = (x_1, y_1)$ e $u_2 = (x_2, y_2)$ pertencem a $\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} T(u_1 + u_2) &= T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = ((y_1 + y_2)^2, x_1 + x_2) \\ &= (y_1^2, x_1) + (y_2^2, x_2) + (2y_1y_2, 0) \neq T(u_1) + T(u_2). \end{aligned}$$

Propriedades 3.1.9. Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ e $T : U \rightarrow V$ uma transformação linear. Valem as seguintes propriedades:

P1. $T(0) = 0$.

P2. $T(-u) = -T(u)$, $\forall u \in U$.

P3. $T(u_1 - u_2) = T(u_1) - T(u_2)$, $\forall u_1, u_2 \in U$.

P4. Se W é um subespaço vetorial de U , então $T(W) = \{T(w) \mid w \in W\}$ é um subespaço vetorial de V .

P5. Se L é um subespaço vetorial de V , então $T^{-1}(L) = \{u \in U \mid T(u) \in L\}$ é um subespaço vetorial de U .

P6. $T\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i T(u_i)$, $\forall \alpha_i \in \mathbb{R}$, $\forall u_i \in U$, $i = 1, \dots, n$.

Demonstração:**P1.** Temos

$$T(0) + 0 = T(0) = T(0 + 0) = T(0) + T(0).$$

Somando $-T(0)$ a ambos os lados, temos $0 = T(0)$.**P2.** Temos

$$T(u) + (-T(u)) = 0 = T(0) = T(u + (-u)) = T(u) + T(-u).$$

Somando $-T(u)$ a ambos os lados, temos $-T(u) = T(-u)$.**P3.** Faça como exercício.**P4.** Sabemos que $T(W) = \{T(w) \mid w \in W\}$.(a) Como $T(0) = 0$, então $0 \in T(W)$.(b) Sejam $v_1, v_2 \in T(W)$, então $v_1 = T(w_1)$ e $v_2 = T(w_2)$, com $w_1, w_2 \in W$. Logo,

$$v_1 + v_2 = T(w_1) + T(w_2) = T(w_1 + w_2),$$

onde a última igualdade vale pois T é linear. Como $w_1 + w_2 \in W$, pois W é subespaço de U , então $v_1 + v_2 \in T(W)$.(c) Sejam $v \in T(W)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então $v = T(w)$, com $w \in W$. Logo,

$$\alpha v = \alpha T(w) = T(\alpha w),$$

onde a última igualdade vale pois T é linear. Como $\alpha w \in W$, pois W é subespaço de U , então $\alpha v \in T(W)$.**P5.** Note: $u \in T^{-1}(L) \Leftrightarrow T(u) \in L$.(a) $0 \in T^{-1}(L)$, pois $T(0) = 0 \in L$, já que L é subespaço de V .(b) Sejam $u_1, u_2 \in T^{-1}(L)$, então $T(u_1), T(u_2) \in L$ e, como L é subespaço de V , $T(u_1) + T(u_2) \in L$. Assim $T(u_1 + u_2) \in L$, o que implica $u_1 + u_2 \in T^{-1}(L)$.(c) Sejam $u \in T^{-1}(L)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então $T(u) \in L$ e, como L é subespaço de V , $\alpha T(u) \in L$. Logo $T(\alpha u) \in L$, o que implica $\alpha u \in T^{-1}(L)$.**P6.** Por indução sobre n . □**Proposição 3.1.10.** *Seja U um espaço vetorial de dimensão finita com base $\{u_1, \dots, u_n\}$. Toda transformação linear $T : U \rightarrow V$ fica determinada por $T(u_1), \dots, T(u_n)$, ou seja, conhecidos estes vetores, conhece-se $T(u)$ para qualquer $u \in U$.***Demonstração:**Como $\{u_1, \dots, u_n\}$ é base de U , dado $u \in U$ existem $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que $u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$. Desse modo,

$$T(u) = T(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n) = \alpha_1 T(u_1) + \dots + \alpha_n T(u_n),$$

onde a última igualdade vale pois T é linear. □**Exemplo 3.1.11.** Encontre uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(1, 2) = (3, -1)$ e $T(0, 1) = (1, 2)$.Note que $\{(1, 2), (0, 1)\}$ forma uma base de $\mathbb{R}^2$ (verifique como exercício). Se $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, então é fácil verificar que

$$(x, y) = x(1, 2) + (y - 2x)(0, 1).$$

Assim, a transformação T deve satisfazer

$$\begin{aligned} T(x, y) &= T(x(1, 2) + (y - 2x)(0, 1)) = xT(1, 2) + (y - 2x)T(0, 1) \\ &= x(3, -1) + (y - 2x)(1, 2) = (x + y, 2y - 5x). \end{aligned}$$

Portanto, a transformação $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(x, y) = (x + y, 2y - 5x)$$

é linear (verifique como exercício) e satisfaz as condições pedidas.

3.2 Núcleo e Imagem

Definição 3.2.1. Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ e $T : U \rightarrow V$ uma transformação linear.

1. Se $X \subseteq U$, definimos a **imagem de X por T** como sendo o conjunto $T(X) = \{T(x) \mid x \in X\}$. Em particular, a **imagem de T** é dada por $\text{Im}(T) = T(U) = \{T(u) \mid u \in U\}$.
2. Se $Y \subseteq V$, definimos a **imagem inversa de Y por T** como sendo o conjunto $T^{-1}(Y) = \{u \in U \mid T(u) \in Y\}$.
3. O **núcleo de T** é o conjunto $\ker(T) = \{u \in U \mid T(u) = 0\}$.

Note que $\ker(T) = T^{-1}(\{0\})$.

Observação 3.2.2. $\ker(T) \subseteq U$ e $\text{Im}(T) \subseteq V$ são subespaços vetoriais.

De fato, isso segue: das Propriedades 3.1.9 itens P4 e P5; do fato que $\{0\} \subseteq V$ e $U \subseteq U$ são subespaços vetoriais; e do fato que $\ker(T) = T^{-1}(\{0\})$ e $\text{Im}(T) = T(U)$.

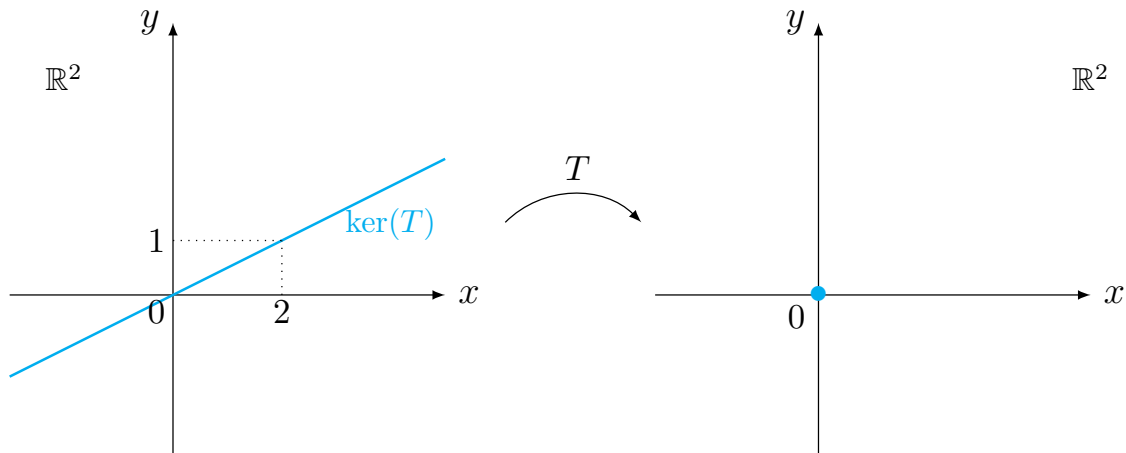
Exemplo 3.2.3. Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (x - 2y, 0)$. Note que T é uma transformação linear (verifique como exercício). Determine $\ker(T)$ e represente geometricamente.

Seja $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Temos

$$\begin{aligned} T(u) = (0, 0) &\Leftrightarrow (x - 2y, 0) = (0, 0) \\ &\Leftrightarrow x - 2y = 0 \Leftrightarrow x = 2y. \end{aligned}$$

Logo,

$$\ker(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 2y\}$$



Note ainda que:

$$\ker(T) = \{(2y, y); y \in \mathbb{R}\} = [(2, 1)],$$

assim, $B = \{(2, 1)\}$ é base de $\ker(T)$ e, portanto, $\dim \ker(T) = 1$.

Proposição 3.2.4. *Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ e seja $T : U \rightarrow V$ uma transformação linear. Então T é injetora se, e somente se, $\ker(T) = \{0\}$.*

Demonstração:

($\Rightarrow$) Suponhamos que T é injetora.

Seja $u \in \ker(T)$, então $T(u) = 0$. Mas, por P1 da Propriedade 3.1.9, $T(0) = 0$. Assim, $T(u) = T(0)$. Como T é injetora, segue que $u = 0$. Logo, $\ker(T) \subseteq \{0\}$ e, como a outra inclusão é sempre verdadeira, segue que $\ker(T) = \{0\}$.

($\Leftarrow$) Suponhamos agora que $\ker(T) = \{0\}$.

Se $u_1, u_2 \in U$, então

$$\begin{aligned} T(u_1) = T(u_2) &\Rightarrow T(u_1) - T(u_2) = 0 \Rightarrow T(u_1 - u_2) = 0 \\ &\Rightarrow u_1 - u_2 \in \ker(T) \Rightarrow u_1 - u_2 = 0 \\ &\Rightarrow u_1 = u_2. \end{aligned}$$

Portanto, T é injetora. □

O teorema a seguir, que relaciona as dimensões de $\ker(T)$ e $\text{Im}(T)$ nos casos em que $\dim U$ é finita, é bastante importante.

Teorema 3.2.5 (Teorema do Núcleo e da Imagem). *Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão finita e $T : U \rightarrow V$ uma transformação linear. Temos*

$$\dim U = \dim \ker(T) + \dim \text{Im}(T).$$

Demonstração:

Seja $B_1 = \{u_1, \dots, u_r\}$ uma base de $\ker(T)$. Pelo Teorema do Completamento, existem $v_1, \dots, v_s \in U$ tais que $B_2 = \{u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s\}$ é uma base de U .

Afirmção: $C = \{T(v_1), \dots, T(v_s)\}$ é base de $\text{Im}(T)$.

De fato,

(a) C é L.I..

Suponhamos $\beta_1 T(v_1) + \dots + \beta_s T(v_s) = 0$, com $\beta_1, \dots, \beta_s \in \mathbb{R}$. Então

$$\begin{aligned} \beta_1 T(v_1) + \dots + \beta_s T(v_s) = 0 &\Rightarrow T(\beta_1 v_1) + \dots + T(\beta_s v_s) = 0 \Rightarrow T(\beta_1 v_1 + \dots + \beta_s v_s) = 0 \\ &\Rightarrow \beta_1 v_1 + \dots + \beta_s v_s \in \ker(T). \end{aligned}$$

Logo, existem $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R}$ tais que

$$\beta_1 v_1 + \dots + \beta_s v_s = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_r u_r,$$

pois B_1 gera $\ker(T)$. Daí,

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_r u_r + (-\beta_1) v_1 + \dots + (-\beta_s) v_s = 0.$$

Como B_2 é L.I., segue que $\alpha_1 = \dots = \alpha_r = \beta_1 = \dots = \beta_s = 0$. Em particular, $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_s = 0$.

(b) C gera $\text{Im}(T)$.

Dado $v \in \text{Im}(T)$, existe $u \in U$ tal que $T(u) = v$. Mas B_2 gera U , então existem $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s \in \mathbb{R}$ tais que

$$u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_r u_r + \beta_1 v_1 + \dots + \beta_s v_s.$$

Logo,

$$\begin{aligned} v &= T(u) = T(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_r u_r + \beta_1 v_1 + \dots + \beta_s v_s) \\ &= \alpha_1 T(u_1) + \dots + \alpha_r T(u_r) + \beta_1 T(v_1) + \dots + \beta_s T(v_s) \\ &= \beta_1 T(v_1) + \dots + \beta_s T(v_s) \end{aligned}$$

já que $u_1, \dots, u_r \in \ker(T)$. Assim, $\text{Im}(T) = [C]$.

Para terminar a demonstração, basta observar que: como $\dim \ker(T) = r$, $\dim U = r + s$ e $\dim \text{Im}(T) = s$, então

$$\dim U = \dim \ker(T) + \dim \text{Im}(T).$$

□

Corolário 3.2.6. *Se U e V são espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ de dimensão finita tais que $\dim U = \dim V$ e se $T : U \rightarrow V$ é uma transformação linear, então as seguintes condições são equivalentes:*

- (i) T é sobrejetora;
- (ii) T é bijetora;
- (iii) T é injetora;
- (iv) T leva bases de U em bases de V .

Demonstração:

(i) $\Rightarrow$ (ii) Se T é sobrejetora, então $\text{Im}(T) = V$ e, pelo Teorema do Núcleo e da Imagem,

$$\dim U = \dim \ker(T) + \dim V.$$

Mas, como $\dim U = \dim V$, segue que $\dim \ker(T) = 0$, isto é, $\ker(T) = \{0\}$. Logo, T é também injetora e, portanto, T é bijetora.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Imediata.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Sendo $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ uma base de U , vamos mostrar que $C = \{T(u_1), \dots, T(u_n)\}$ é uma base de V .

Note que C tem exatamente n elementos (nenhum se repete), pelo fato de que T é injetora. Basta mostrar então que C é L.I..

Sejam $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha_1 T(u_1) + \dots + \alpha_n T(u_n) = 0.$$

Pela linearidade de T , segue que

$$T(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n) = 0 \Rightarrow \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n \in \ker(T).$$

Como T é injetora, $\ker(T) = \{0\}$, então

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n = 0$$

e, como B é L.I., concluímos que $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.

(iv) $\Rightarrow$ (i) Seja $v \in V$. Tomando $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ uma base de U , então nossa hipótese garante que $T(B) = \{T(u_1), \dots, T(u_n)\}$ é uma base de V . Logo, v é combinação linear dos elementos de $T(B)$, ou seja,

$$v = \alpha_1 T(u_1) + \dots + \alpha_n T(u_n),$$

com $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Como T é linear,

$$v = T(\underbrace{\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n}_{\in U}) \Rightarrow v \in \text{Im}(T).$$

Assim, $V \subseteq \text{Im}(T)$. Como $\text{Im}(T) \subseteq V$ sempre, segue que $\text{Im}(T) = V$. Portanto, T é sobrejetora. $\square$

Exemplo 3.2.7. Sejam $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $T : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ uma transformação linear dada por $T(X) = AX - XA$. Encontre o núcleo e a imagem de T .

Núcleo:

Temos que $X \in \ker(T)$ se, e somente se, $AX = XA$. Assim, se $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ temos que $X \in \ker(T)$ se, e somente se,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ c & 2c+d \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a+2c &= a \\ b+2d &= 2a+b \\ c &= c \\ d &= 2c+d \end{cases} \Leftrightarrow c=0 \quad \text{e} \quad a=d \end{aligned}$$

Logo,

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dessa forma

$$\ker(T) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right].$$

Imagem:

Temos que $Y = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in \text{Im}(T)$ se, e somente se, existir $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tal que $Y = AX - XA$, isto é,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ c & 2c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c & 2d-2a \\ 0 & -2c \end{pmatrix} \\ &= 2c \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + 2(d-a) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\text{Im}(T) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right].$$

Outra maneira de encontrar a imagem:

Podemos usar a demonstração do Teorema do Núcleo e da Imagem. Isto é, sabemos que $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ é uma base para $\ker(T)$ e, como no referido teorema, podemos completá-la até uma base de $M_2(\mathbb{R})$ como, por exemplo,

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

E, pelo mesmo teorema,

$$T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

formam uma base para $\text{Im}(T)$, ou seja,

$$\text{Im}(T) = \left[\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

3.3 Isomorfismos e Automorfismos

Definição 3.3.1. Um **isomorfismo** de um espaço vetorial U em um espaço vetorial V é uma transformação linear $T : U \rightarrow V$ que é bijetora. No caso em que $U = V$, um isomorfismo $T : U \rightarrow U$ é chamado de **automorfismo**.

Exemplo 3.3.2. O operador idêntico $I : U \rightarrow U$ dado por $I(u) = u$, para todo $u \in U$, é um automorfismo de U .

Exemplo 3.3.3. $T : \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(a + bt) = (2a, a - b)$ é um isomorfismo.

Pois:

(i) T é transformação linear (verifique como exercício);

(ii) T é injetora;

De fato,

$$\begin{aligned} \ker(T) &= \{a + bt \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \mid T(a + bt) = (0, 0)\} \\ &= \{a + bt \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \mid (2a, a - b) = (0, 0)\} = \{a + bt \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \mid a = 0 \text{ e } b = 0\} \\ &= \{0\} \end{aligned}$$

Como $\dim \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) = \dim \mathbb{R}^2 = 2$ e T é uma transformação linear injetora, segue, do Corolário 3.2.6, que T é bijetora.

Portanto, T é isomorfismo.

Proposição 3.3.4. *Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$. Se $T : U \rightarrow V$ é um isomorfismo, então $T^{-1} : V \rightarrow U$ também é isomorfismo.*

Demonstração:

A bijetividade de T^{-1} segue do fato de T ser bijetora. Resta apenas mostrar que T^{-1} é uma transformação linear.

Sejam $v_1, v_2 \in V$, como T é sobrejetora, existem $u_1, u_2 \in U$ tais que $T(u_1) = v_1$ e $T(u_2) = v_2$, e ainda $u_1 = T^{-1}(v_1)$ e $u_2 = T^{-1}(v_2)$. Assim,

$$\begin{aligned} T^{-1}(v_1 + v_2) &= T^{-1}(T(u_1) + T(u_2)) \stackrel{T \text{ é linear}}{=} T^{-1}(T(u_1 + u_2)) \\ &= u_1 + u_2 = T^{-1}(v_1) + T^{-1}(v_2). \end{aligned}$$

Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $v \in V$, como T é sobrejetora, existe $u \in U$ tal que $T(u) = v$ e $u = T^{-1}(v)$. Assim,

$$\begin{aligned} T^{-1}(\alpha v) &= T^{-1}(\alpha T(u)) \stackrel{T \text{ é linear}}{=} T^{-1}(T(\alpha u)) \\ &= \alpha u = \alpha T^{-1}(v). \end{aligned}$$

Portanto, T^{-1} é um isomorfismo. $\square$

Definição 3.3.5. Dizemos que os **espaços vetoriais** U e V são **isomorfos** se existir um isomorfismo $T : U \rightarrow V$ (e, consequentemente, $T^{-1} : V \rightarrow U$).

É possível estabelecer uma caracterização para os isomorfismos entre espaços vetoriais de dimensão finita, em termos da dimensão. O lema a seguir nos levará a isso.

Lema 3.3.6. *Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$. Se $\dim U = n$ e $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ é uma base de U , então, para toda sequência $v_1, \dots, v_n$ de vetores de V , a aplicação $T : U \rightarrow V$ dada por*

$$T \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i \right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$$

é linear e $T(u_i) = v_i$, $i = 1, \dots, n$. Além disso, se $G : U \rightarrow V$ é linear e $G(u_i) = v_i$, $i = 1, \dots, n$, então $G = T$.

Demonstração:

É fácil ver que T , da forma que foi definida, é linear (verifique como exercício!).

Vamos mostrar que $T(u_i) = v_i$, $i = 1, \dots, n$.

Note que, para $i = 1$,

$$T(u_1) = T(1 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + \dots + 0 \cdot u_n) = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_n = v_1.$$

Analogamente, $T(u_2) = v_2, \dots, T(u_n) = v_n$.

Agora, seja $w \in U$, então $w = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i$ de maneira única. Daí,

$$\begin{aligned} G(w) &\stackrel{G \text{ é linear}}{=} \sum_{i=1}^n \alpha_i G(u_i) \stackrel{G(u_i)=v_i}{=} \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \stackrel{T(u_i)=v_i}{=} \sum_{i=1}^n \alpha_i T(u_i) \\ &= T \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i \right) = T(w). \end{aligned}$$

Como w é arbitrário, segue que $G = T$. $\square$

Note: Os v_i 's não necessariamente são distintos entre si, mas os u_i 's são (pois B é base).

Teorema 3.3.7. *Dois espaços vetoriais U e V de dimensão finita são isomorfos se, e somente se, $\dim U = \dim V$.*

Demonstração:

($\Rightarrow$) Seja $T : U \rightarrow V$ um isomorfismo. Então $\ker(T) = \{0\}$ e $\text{Im}(T) = V$. Do Teorema do Núcleo e da Imagem,

$$\dim U = \dim \ker(T) + \dim \text{Im}(T) = 0 + \dim V = \dim V.$$

($\Leftarrow$) Sejam $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ e $C = \{v_1, \dots, v_n\}$ bases de U e V , respectivamente, e consideremos $T : U \rightarrow V$ dada por

$$T\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i,$$

conforme o lema anterior. Assim, T é linear.

Tome $w = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i \in \ker(T)$. Temos

$$0 = T(w) = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i.$$

Como C é L.I., $\alpha_i = 0$, para todo $i = 1, \dots, n$. Logo, $w = 0$ e T é injetora.

Como $\dim U = \dim V$ e T é injetora, segue do Corolário 3.2.6 que T é bijetora.

Portanto, T é isomorfismo. $\square$

Corolário 3.3.8. *Se V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensão n , então V é isomorfo a $\mathbb{R}^n$.*

3.4 Operações com transformações lineares / O espaço vetorial $\mathcal{L}(U, V)$

Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$. Denotaremos por $\mathcal{L}(U, V)$ o conjunto das transformações lineares $T : U \rightarrow V$. Quando $U = V$, denotaremos $\mathcal{L}(U, U) = \mathcal{L}(U)$.

Nesta seção, veremos algumas operações nesse conjunto e mostraremos que ele também é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Definição 3.4.1. Dadas $T, S \in \mathcal{L}(U, V)$, definimos a **soma** $T + S$ da seguinte maneira:

$$T + S : U \rightarrow V \quad \text{e} \quad (T + S)(u) = T(u) + S(u), \quad \forall u \in U.$$

Note que a aplicação assim definida também é uma transformação linear, pois:

(a)

$$\begin{aligned} (T + S)(u_1 + u_2) &= T(u_1 + u_2) + S(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2) + S(u_1) + S(u_2) \\ &= T(u_1) + S(u_1) + T(u_2) + S(u_2) \\ &= (T + S)(u_1) + (T + S)(u_2) \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} (T + S)(\alpha u) &= T(\alpha u) + S(\alpha u) = \alpha T(u) + \alpha S(u) = \alpha(T(u) + S(u)) \\ &= \alpha(T + S)(u). \end{aligned}$$

Temos, assim, uma adição $(T, S) \rightarrow T + S$ em $\mathcal{L}(U, V)$.

Para essa adição, valem as seguintes propriedades:

(I) Associativa: $T + (S + R) = (T + S) + R$, para quaisquer $T, S, R \in \mathcal{L}(U, V)$;

- (II) Comutativa: $T + S = S + T$, para quaisquer $T, S \in \mathcal{L}(U, V)$;
 (III) Existência de elemento neutro: a transformação linear nula $0 : U \rightarrow V$ é tal que $T + 0 = T$, para qualquer $T \in \mathcal{L}(U, V)$;
 (IV) Para toda transformação $T \in \mathcal{L}(U, V)$ existe nesse conjunto a transformação oposta: $(-T) \in \mathcal{L}(U, V)$ tal que $T + (-T) = 0$.

Sugerimos a verificação dessas quatro propriedades como exercício!

Definição 3.4.2. Dados $T \in \mathcal{L}(U, V)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, definimos o **produto** λT da seguinte maneira:

$$\lambda T : U \rightarrow V \quad \text{e} \quad (\lambda T)(u) = \lambda T(u), \quad \forall u \in U.$$

Note que a aplicação λT assim definida também é uma transformação linear (verifique como exercício), ou seja, $\lambda T \in \mathcal{L}(U, V)$.

Dessa forma, fica definida uma multiplicação por escalar, que tem as seguintes propriedades:

- (I) $(\lambda\gamma)T = \lambda(\gamma T)$;
 (II) $(\lambda + \gamma)T = \lambda T + \gamma T$;
 (III) $\lambda(T + S) = \lambda T + \lambda S$;
 (IV) $1 \cdot T = T$;

quaisquer que sejam $\lambda, \gamma \in \mathbb{R}$ e $T, S \in \mathcal{L}(U, V)$.

Também sugerimos a verificação dessas quatro propriedades como exercício!

Segue do que vimos até aqui o seguinte resultado:

Proposição 3.4.3. Se U e V são espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$, então $\mathcal{L}(U, V)$ também é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Definição 3.4.4. Se U é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, definimos o **espaço dual** de U como sendo $U^* := \mathcal{L}(U, \mathbb{R})$, isto é, U^* é formado pelas transformações lineares $T : U \rightarrow \mathbb{R}$. Estas transformações lineares também são chamadas de **funcionais lineares** definidos em U .

Teorema 3.4.5. Se U é um espaço vetorial de dimensão n e V é um espaço vetorial de dimensão m , então $\mathcal{L}(U, V)$ tem dimensão $m \cdot n$.

Corolário 3.4.6. Se U é um espaço vetorial de dimensão n , então o seu dual U^* também tem dimensão n .

Observação 3.4.7. Se $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ forma uma base de U , então os funcionais lineares $f_1, \dots, f_n : U \rightarrow \mathbb{R}$ dados por

$$f_j(u) = f_j(x_1 u_1 + \dots + x_n u_n) = x_j, \quad j = 1, \dots, n$$

formam uma base de U^* . Essa base é chamada de **base dual** de B .

Exemplo 3.4.8. Considere a base $B = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ de $\mathbb{R}^3$. Encontre a base dual de B .

Dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos

$$(x, y, z) = z(1, 1, 1) + (y - z)(1, 1, 0) + (x - y)(1, 0, 0)$$

(verifique como exercício).

Desse modo, a base dual de B é dada por $\{f_1, f_2, f_3\}$, onde

$$f_1(x, y, z) = z, \quad f_2(x, y, z) = y - z \quad \text{e} \quad f_3(x, y, z) = x - y.$$

Veremos agora mais uma importante operação entre transformações lineares: a composição.

Definição 3.4.9. Sejam U , V e W espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$. Se $T \in \mathcal{L}(U, V)$ e $S \in \mathcal{L}(V, W)$, definimos a **aplicação composta** da seguinte maneira:

$$S \circ T : U \rightarrow W \quad \text{e} \quad (S \circ T)(u) = S(T(u)), \quad \forall u \in U.$$

Note que $S \circ T \in \mathcal{L}(U, W)$ (verifique como exercício).

Observação 3.4.10. A operação $(S, T) \rightarrow S \circ T$ em $\mathcal{L}(U)$ não é comutativa em geral. Por exemplo: considere $T, S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ dadas por

$$T(x, y) = (x + y, 0) \quad \text{e} \quad S(x, y) = (x, 2y).$$

Então

$$T \circ S(x, y) = T(S(x, y)) = T(x, 2y) = (x + 2y, 0)$$

$$S \circ T(x, y) = S(T(x, y)) = S(x + y, 0) = (x + y, 0)$$

Logo, $T \circ S \neq S \circ T$.

Proposição 3.4.11. Sejam $T \in \mathcal{L}(U, V)$, $S \in \mathcal{L}(V, W)$ e $R \in \mathcal{L}(W, X)$, onde U , V , W e X são espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$. Então

$$(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T).$$

Demonstração:

Para todo $u \in U$, temos

$$(R \circ S) \circ T(u) = (R \circ S)(T(u)) = R(S(T(u)))$$

e, por outro lado,

$$R \circ (S \circ T)(u) = R((S \circ T)(u)) = R(S(T(u))).$$

Comparando as expressões, chegamos ao resultado desejado. □

Proposição 3.4.12. Se $S, T \in \mathcal{L}(U, V)$ e $R \in \mathcal{L}(V, W)$, onde U , V e W são espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$, então

$$R \circ (S + T) = R \circ S + R \circ T.$$

Demonstração:

Faça como exercício! □

Proposição 3.4.13. Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$. Se $T \in \mathcal{L}(U, V)$ e $I_V \in \mathcal{L}(V)$ é a identidade em V , isto é, $I_V(v) = v$, para todo $v \in V$, e $I_U \in \mathcal{L}(U)$ é a identidade em U , então

$$I_V \circ T = T \quad \text{e} \quad T \circ I_U = T.$$

Observação 3.4.14. No conjunto $\mathcal{L}(U)$ define-se **potenciação** para expoentes naturais da seguinte maneira:

$$T^0 = I; T^1 = T; T^2 = T \circ T; T^3 = T \circ T \circ T; \dots; T^n = T \circ T^{n-1}.$$

Contudo, para essa potenciação, podemos ter resultados curiosos, como

$$T^2 = T, \text{ com } T \neq I \text{ e } T \neq -I$$

e

$$T^m = 0, \text{ com } T \neq 0.$$

Um operador $T \in \mathcal{L}(U)$ tal que $T^2 = T$ chama-se **idempotente** (ou **projeção**).

Um operador $T \in \mathcal{L}(U)$ tal que $T^m = 0$, para algum $m \in \mathbb{N}$, chama-se **nilpotente**.

Exemplo 3.4.15. $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $F(x, y) = (0, x)$ é nilpotente, pois:

$$F^2(x, y) = F(F(x, y)) = F(0, x) = (0, 0) = 0(x, y),$$

o que nos garante que $F^2 = 0$.

Exemplo 3.4.16. O operador derivação $D : \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ é nilpotente.

Exemplo 3.4.17. $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (x, 0)$ é idempotente, pois:

$$T^2(x, y) = T(T(x, y)) = T(x, 0) = T(x, y),$$

o que nos garante que $T^2 = T$.

3.5 Matriz de uma transformação linear

Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ de dimensão n e m , respectivamente. Tome as bases $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ de U e $C = \{v_1, \dots, v_m\}$ de V . Se $T \in \mathcal{L}(U, V)$, podemos escrever

$$T(u_j) = \alpha_{1j}v_1 + \dots + \alpha_{mj}v_m = \sum_{i=1}^m \alpha_{ij}v_i, \quad j = 1, \dots, n,$$

onde os $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ estão univocamente determinados.

Definição 3.5.1. A matriz $m \times n$ sobre $\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} = (\alpha_{ij}),$$

que se obtém das considerações anteriores, é chamada **matriz de T em relação às bases B e C** e é denotada por $[T]_{B,C}$.

No caso em que $U = V$ e $B = C$, usaremos a notação $[T]_B$.

Exemplo 3.5.2. Encontre a matriz de $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y, z) = (x + y, x - z)$ em relação às bases $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ e $C = \{(1, 0), (0, 1)\}$.

Temos

$$\begin{aligned} T(1, 0, 0) &= (1, 1) = 1 \cdot (1, 0) + 1 \cdot (0, 1) \\ T(0, 1, 0) &= (1, 0) = 1 \cdot (1, 0) + 0 \cdot (0, 1) \\ T(0, 0, 1) &= (0, -1) = 0 \cdot (1, 0) + (-1) \cdot (0, 1) \end{aligned}$$

Assim,

$$[T]_{B,C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 3.5.3. Encontre a matriz de $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ do exemplo anterior em relação às bases $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ e $C' = \{(1, 1), (0, 1)\}$.

Temos

$$\begin{aligned} T(1, 0, 0) &= (1, 1) = 1 \cdot (1, 1) + 0 \cdot (0, 1) \\ T(0, 1, 0) &= (1, 0) = 1 \cdot (1, 1) + (-1) \cdot (0, 1) \\ T(0, 0, 1) &= (0, -1) = 0 \cdot (1, 1) + (-1) \cdot (0, 1) \end{aligned}$$

(verifique como exercício).

Assim,

$$[T]_{B,C'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Note que $[T]_{B,C} \neq [T]_{B,C'}$.

Exemplo 3.5.4. Dada a matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ache $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ de maneira que $M = [T]_{B,C}$, onde $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 2)\}$ e $C = \{(1, 0), (1, 1)\}$.

Da definição de $[T]_{B,C}$, devemos ter

$$\begin{aligned} T(1, 0, 0) &= 1 \cdot (1, 0) + 0 \cdot (1, 1) = (1, 0) \\ T(0, 1, 0) &= 2 \cdot (1, 0) + 1 \cdot (1, 1) = (3, 1) \\ T(0, 1, 2) &= 3 \cdot (1, 0) + 0 \cdot (1, 1) = (3, 0) \end{aligned}$$

Agora, seja $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Escrevendo na base B :

$$(x, y, z) = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 1, 2),$$

obtemos $a = x$, $b = y - \frac{z}{2}$ e $c = \frac{z}{2}$. Logo,

$$\begin{aligned} T(x, y, z) &= T\left((x(1, 0, 0) + \left(y - \frac{z}{2}\right)(0, 1, 0) + \frac{z}{2}(0, 1, 2))\right) \\ &= x(1, 0) + \left(y - \frac{z}{2}\right)(3, 1) + \frac{z}{2}(3, 0) \\ &= \left(x + 3y, y - \frac{z}{2}\right). \end{aligned}$$

Veamos a seguir algumas propriedades dessas matrizes.

Proposição 3.5.5. *Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$, de dimensão finita, com bases B e C , respectivamente. Se $T, S \in \mathcal{L}(U, V)$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, então*

$$[\lambda T + \mu S]_{B,C} = \lambda[T]_{B,C} + \mu[S]_{B,C}.$$

Demonstração:

Colocando $B = \{u_1, \dots, u_n\}$, $C = \{v_1, \dots, v_m\}$, $[T]_{B,C} = (\alpha_{ij})$ e $[S]_{B,C} = (\beta_{ij})$, temos

$$\begin{aligned} (\lambda T + \mu S)(u_j) &= \lambda T(u_j) + \mu S(u_j) \\ &= \lambda(\alpha_{1j}v_1 + \dots + \alpha_{mj}v_m) + \mu(\beta_{1j}v_1 + \dots + \beta_{mj}v_m) \\ &= (\lambda\alpha_{1j} + \mu\beta_{1j})v_1 + \dots + (\lambda\alpha_{mj} + \mu\beta_{mj})v_m \end{aligned}$$

e, desse modo,

$$[\lambda T + \mu S]_{B,C} = \begin{pmatrix} \lambda\alpha_{11} + \mu\beta_{11} & \dots & \lambda\alpha_{1n} + \mu\beta_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda\alpha_{m1} + \mu\beta_{m1} & \dots & \lambda\alpha_{mn} + \mu\beta_{mn} \end{pmatrix} = \lambda[T]_{B,C} + \mu[S]_{B,C}.$$

□

Corolário 3.5.6. *Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$, de dimensão finita, com bases B e C , respectivamente. Se $T \in \mathcal{L}(U, V)$ é a transformação nula, então $[T]_{B,C} = 0$.*

Proposição 3.5.7. *Se B e C são bases de um mesmo espaço vetorial V de dimensão finita e $I \in \mathcal{L}(V)$ é a identidade de V , então $[I]_{B,C} = M_C^B$.*

Demonstração:

Sejam $B = \{u_1, \dots, u_n\}$, $C = \{v_1, \dots, v_n\}$, $[I]_{B,C} = (\alpha_{ij})$. Como

$$u_j = I(u_j) = \alpha_{1j}v_1 + \dots + \alpha_{nj}v_n,$$

temos que $[I]_{B,C} = M_C^B$, pela definição de M_C^B .

□

Proposição 3.5.8. *Sejam U , V e W espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ de dimensão finita. Sejam $T \in \mathcal{L}(U, V)$ e $S \in \mathcal{L}(V, W)$. Se B , C e D são bases de U , V e W , respectivamente, então*

$$[S \circ T]_{B,D} = [S]_{C,D} \cdot [T]_{B,C}.$$

Demonstração:

Coloquemos $B = \{u_1, \dots, u_n\}$, $C = \{v_1, \dots, v_m\}$ e $D = \{w_1, \dots, w_p\}$. Se $[T]_{B,C} = (\alpha_{ij})$ e $[S]_{C,D} = (\beta_{kl})$, então

$$\begin{aligned} S \circ T(u_j) &= S(T(u_j)) = S\left(\sum_{i=1}^m \alpha_{ij}v_i\right) = \sum_{i=1}^m \alpha_{ij}S(v_i) = \sum_{i=1}^m \alpha_{ij}\left(\sum_{k=1}^p \beta_{ki}w_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^p \left(\sum_{i=1}^m \beta_{ki}\alpha_{ij}\right)w_k. \end{aligned}$$

Portanto,

$$[S \circ T]_{B,D} = \left(\sum_{i=1}^m \beta_{ki}\alpha_{ij}\right) = [S]_{C,D} \cdot [T]_{B,C}$$

□

Proposição 3.5.9. *Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$, de dimensão finita, com bases B e C , respectivamente. Se $T \in \mathcal{L}(U, V)$ possui inversa T^{-1} , então*

$$[T^{-1}]_{C,B} = [T]_{B,C}^{-1}.$$

Demonstração:

Seja $n = \dim U = \dim V$. Temos

$$[T]_{B,C} \cdot [T^{-1}]_{C,B} = [T \circ T^{-1}]_{C,C} = [I]_{C,C} = I_n.$$

Analogamente,

$$[T^{-1}]_{C,B} \cdot [T]_{B,C} = [T^{-1} \circ T]_{B,B} = [I]_{B,B} = I_n.$$

Portanto,

$$[T^{-1}]_{C,B} = [T]_{B,C}^{-1}.$$

□

Proposição 3.5.10. *Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$, de dimensão finita, com bases B e C , respectivamente. Se $T \in \mathcal{L}(U, V)$ e $u \in U$, então, representando por $T(u)_C$ e u_B as coordenadas dos vetores $T(u)$ e u nas bases B e C , respectivamente, temos*

$$T(u)_C = [T]_{B,C} \cdot u_B.$$

Demonstração:

Sejam $B = \{u_1, \dots, u_n\}$, $C = \{v_1, \dots, v_m\}$, $[T]_{B,C} = (\alpha_{ij})$ e $u_B = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$. Temos

$$\begin{aligned} T(u) &= T(a_1 u_1 + \dots + a_n u_n) = a_1 T(u_1) + \dots + a_n T(u_n) \\ &= a_1 (\alpha_{11} v_1 + \dots + \alpha_{m1} v_m) + \dots + a_n (\alpha_{1n} v_1 + \dots + \alpha_{mn} v_m) \\ &= (a_1 \alpha_{11} + \dots + a_n \alpha_{1n}) v_1 + \dots + (a_1 \alpha_{m1} + \dots + a_n \alpha_{mn}) v_m, \end{aligned}$$

ou seja,

$$T(u)_C = \begin{pmatrix} a_1 \alpha_{11} + \dots + a_n \alpha_{1n} \\ \vdots \\ a_1 \alpha_{m1} + \dots + a_n \alpha_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

isto é,

$$T(u)_C = [T]_{B,C} \cdot u_B.$$

□

Teorema 3.5.11. *Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$, de dimensão finita, com bases B e C , respectivamente. Então $T \in \mathcal{L}(U, V)$ é um isomorfismo se, e somente se, $[T]_{B,C}$ possui inversa.*

Demonstração:

($\Rightarrow$) Se T é um isomorfismo, então, pela Proposição 3.5.9, $[T]_{B,C}$ possui inversa dada por $[T^{-1}]_{C,B}$.

($\Leftarrow$) Reciprocamente, suponha que $[T]_{B,C}$ possui inversa. Nesse caso, $[T]_{B,C}$ é uma matriz quadrada e, então, $\dim U = \dim V$. Assim, para mostrar que T é isomorfismo, basta mostrar que T é injetora (usando o Corolário 3.2.6).

Se $T(u) = 0$, então

$$u_B = [T]_{B,C}^{-1} \cdot T(u)_C = [T]_{B,C}^{-1} \cdot 0 = 0.$$

Assim, $u = 0$ e, portanto, T é injetora. $\square$

Exemplo 3.5.12. Verifique se $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ dada por $T(x, y) = x + (x + y)t$ é um isomorfismo. Se sim, encontre T^{-1} .

Considere as bases canônicas $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$ e $C = \{1, t\}$ de $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$, respectivamente. Como

$$T(1, 0) = 1 + t \quad \text{e} \quad T(0, 1) = t = 0 + t,$$

a matriz de T com relação a essas bases é dada por

$$[T]_{B,C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Note que $\det([T]_{B,C}) = 1 \neq 0$ e, assim, $[T]_{B,C}$ possui inversa. Logo, T é um isomorfismo. Calculemos a inversa dessa matriz:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_2 - L_1 \rightarrow L_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right).$$

Assim,

$$[T^{-1}]_{C,B} = [T]_{B,C}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} T^{-1}(1) &= 1 \cdot (1, 0) - 1 \cdot (0, 1) = (1, -1) \\ T^{-1}(t) &= 0 \cdot (1, 0) + 1 \cdot (0, 1) = (0, 1) \end{aligned}$$

Portanto,

$$T^{-1}(a + bt) = a \cdot (1, -1) + b \cdot (0, 1) = (a, -a + b).$$

O próximo resultado busca responder à seguinte pergunta: sejam U um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensão finita, B e C duas bases de U e $T \in \mathcal{L}(U)$. Quando mudamos da base B para a base C , o que acontece com a matriz de T ?

Teorema 3.5.13. *Sejam U um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensão finita. Se $T \in \mathcal{L}(U)$ e B e C são bases de U , então*

$$[T]_C = M_C^B \cdot [T]_B \cdot M_B^C.$$

Demonstração:

Como $M_C^B = [I]_{B,C}$ e $M_B^C = [I]_{C,B}$, então

$$M_C^B \cdot [T]_B \cdot M_B^C = [I]_{B,C} \cdot [T]_B \cdot [I]_{C,B} = [I]_{B,C} \cdot [T]_{C,B} = [T]_{C,C}.$$

$\square$

Exemplo 3.5.14. Considere $B = \{(1, 1), (1, -1)\}$ base de $\mathbb{R}^2$ e $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Encontre $[T]_C$, onde C é a base canônica de $\mathbb{R}^2$.

Como

$$(1, 0) = \frac{1}{2}(1, 1) + \frac{1}{2}(1, -1) \quad \text{e} \quad (0, 1) = \frac{1}{2}(1, 1) - \frac{1}{2}(1, -1)$$

obtemos

$$M_B^C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad M_C^B = (M_B^C)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$[T]_C = M_C^B \cdot [T]_B \cdot M_B^C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

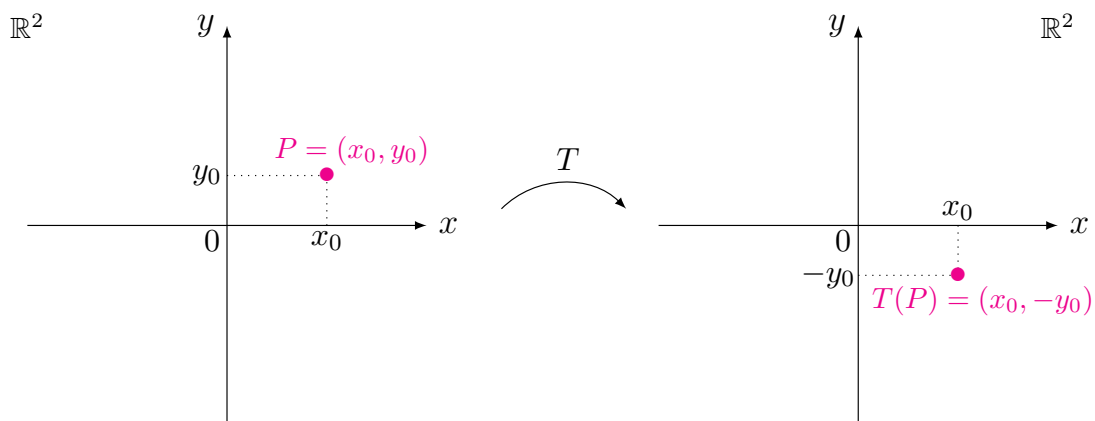
Note ainda que

$$\begin{aligned} T(x, y) &= T(x(1, 0) + y(0, 1)) = x \cdot T(1, 0) + y \cdot T(0, 1) \\ &= x(3(1, 0) - 2(0, 1)) + y(-2(1, 0) + 3(0, 1)) \\ &= x(3, -2) + y(-2, 3) = (3x - 2y, 3y - 2x). \end{aligned}$$

3.6 Algumas transformações do plano no plano

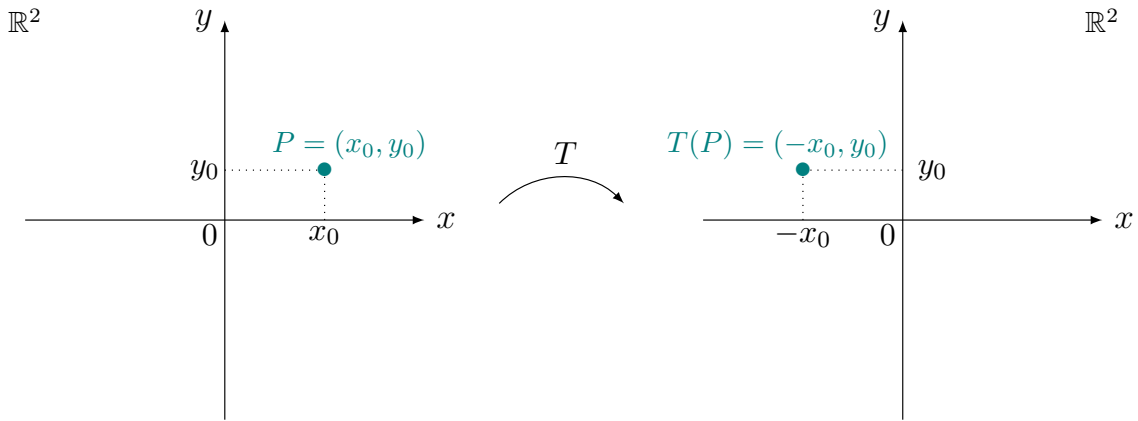
1. Reflexão em torno do eixo x

A transformação $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (x, -y)$ é um automorfismo (verifique como exercício!) que reflete um ponto P do plano em torno do eixo x .



2. Reflexão em torno do eixo y

A transformação $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (-x, y)$ é um automorfismo (verifique como exercício!) que reflete um ponto P do plano em torno do eixo y .

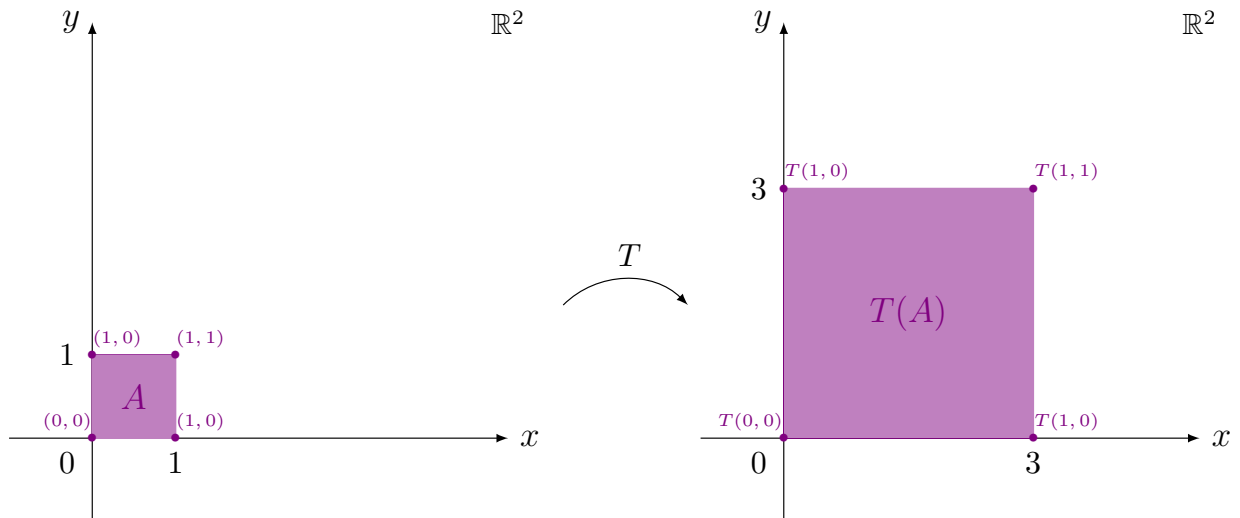


3. Expansão e Contração

Sejam $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ (λ fixo) e uma transformação $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = \lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$. T é um automorfismo e é chamada de contração ou expansão, de acordo com o valor de λ :

- Se $0 < \lambda < 1$, T é chamada de contração.
- Se $\lambda > 1$, T é chamada de expansão.

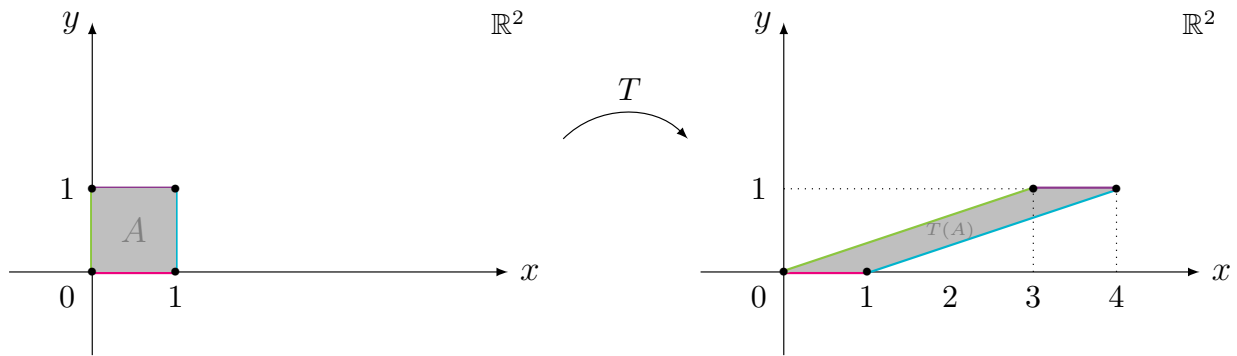
Exemplo 3.6.1. Represente geometricamente a imagem de $A = [0, 1] \times [0, 1]$ pela transformação $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = 3(x, y)$.



4. Cisalhamento (Horizontal)

Seja $a \in \mathbb{R}$ (a fixo). A transformação $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (x + ay, y)$ é um automorfismo e é chamada de cisalhamento horizontal.

Exemplo 3.6.2. Represente geometricamente a imagem de $A = [0, 1] \times [0, 1]$ pela transformação $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (x + 3y, y)$.



5. Cisalhamento (Vertical)

Seja $b \in \mathbb{R}$ (b fixo). A transformação $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (x, y + bx)$ é um automorfismo e é chamada de cisalhamento vertical.

Exercício 3.6.1. Represente geometricamente a imagem de $A = [0, 1] \times [0, 1]$ pela transformação $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (x, y + 3x)$.

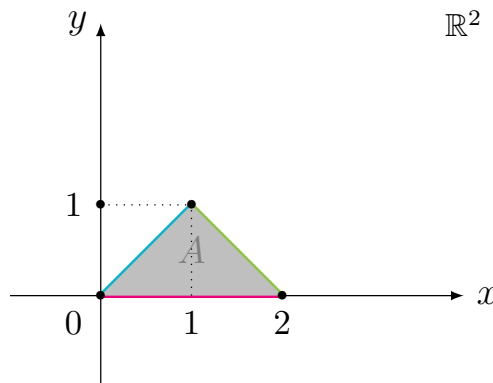
6. Rotação de um ângulo θ

A transformação $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(x, y) = \left[\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right]^t = (x \cos \theta - y \sin \theta, y \cos \theta + x \sin \theta)$$

é um automorfismo e rotaciona uma figura em $\mathbb{R}^2$ em um ângulo θ .

Exemplo 3.6.3. Tome $\theta = \frac{\pi}{2}$ e represente geometricamente $T(A)$, para A como na figura:



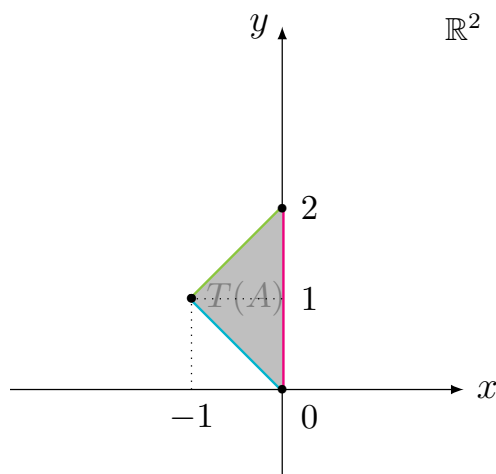
Para $\theta = \frac{\pi}{2}$, temos

$$T(x, y) = \left(x \cos \frac{\pi}{2} - y \sin \frac{\pi}{2}, y \cos \frac{\pi}{2} + x \sin \frac{\pi}{2} \right) = (-y, x).$$

Note que

$$T(0, 0) = (0, 0), \quad T(1, 1) = (-1, 1), \quad T(2, 0) = (0, 2).$$

Assim, podemos representar $T(A)$ da seguinte maneira:



3.7 Exercícios

Seção 3.1

Exercício 3.1. Verificar se a aplicação $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $F(x, y, z) = (z, x + y)$ é linear.

Exercício 3.2. Verificar se a transformação $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(x, y, z) = -2x + 3y + 7z$ é linear.

Exercício 3.3. Quais das seguintes aplicações de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$ são operadores lineares?

- (a) $F_1(x, y, z) = (x - y, x + y, 0)$.
- (b) $F_2(x, y, z) = (2x - y + z, 0, 0)$.
- (c) $F_3(x, y, z) = (x, x, x)$.
- (d) $F_4(x, y, z) = (2x^2 + 3y, x, z)$.

Exercício 3.4. Seja $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ o operador linear definido na base canônica da seguinte forma:

$$F(1, 0, 0) = (2, 3, 1), \quad F(0, 1, 0) = (5, 2, 7), \quad F(0, 0, 1) = (-2, 0, 7).$$

Determine $F(x, y, z)$, onde (x, y, z) é um vetor genérico de $\mathbb{R}^3$. Mostre que F é, de fato, um operador linear.

Exercício 3.5. Determinar uma aplicação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$T(1, 0, 0) = (1, 2), \quad T(0, 1, 0) = (3, 4), \quad T(0, 0, 1) = (0, 0).$$

Seções 3.2 e 3.3

Exercício 3.6. Determinar o núcleo das transformações lineares abaixo e descreva-os geometricamente:

- (a) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, T(x, y) = y + 2x$.
- (b) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, T(x, y, z) = z - 2x$.

(c) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, T(x, y) = (2x + 2y, x + y).$

(d) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, T(x, y) = (x + y, x - y).$

(e) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, T(x, y, z) = (z - x, z - 2x, z - 3x).$

Exercício 3.7. Seja $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação linear dada por $F(x, y, z) = (x + y, 2x - y + z).$

(a) Dar uma base e a dimensão de $\ker(F).$

(b) Dar uma base e a dimensão de $\text{Im}(F).$

Exercício 3.8. Determinar bases para o núcleo e para a imagem das transformações lineares abaixo:

(a) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, T(x, y, z) = (x + y, 2x + y, 3x + y).$

(b) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, T(x, y) = y + 2x.$

(c) $T : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R}), T(X) = AX,$ onde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

(d) $T : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R}), T(X) = AX + X,$ onde $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$

Exercício 3.9. Determinar um operador linear em $\mathbb{R}^4$ cujo núcleo é gerado pelos vetores $(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0).$

Exercício 3.10. Determinar um operador linear em $\mathbb{R}^3$ cujo núcleo é gerado pelos vetores $(1, 1, 0), (0, 0, 1)$ e a imagem é gerada pelo vetor $(1, -1, 1).$

Seção 3.4

Exercício 3.11. Sejam $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ as transformações lineares definidas por $F(x, y, z) = (x + y, z)$ e $G(x, y, z) = (x, y - z).$ Determine as seguintes transformações lineares de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^2$:

(a) $F + G;$

(b) $2F - 3G.$

Exercício 3.12. Sejam $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ as transformações lineares definidas por $F(x, y) = x + 2y$ e $G(x) = 2x.$ Determine a transformação $G \circ F.$

Exercício 3.13. * Considere $F, G \in L(\mathbb{R}^2)$ definidos por $F(x, y) = (x - y, x)$ e $G(x, y) = (x, 0).$ Determinar:

(a) $2F + 3G;$

(b) $F \circ G;$

(c) $G \circ F;$

(d) $F^2;$

(e) G^2 .

Exercício 3.14. Seja $F \in L(\mathbb{R}^3)$ definida por $F(x, y, z) = (3x, x - y, 2x + y + z)$. Mostre que

$$(F^2 - I) \circ (F - 3I) = 0 \text{ (operador nulo).}$$

Exercício 3.15. Mostre que os operadores $F, G, H \in L(\mathbb{R}^2)$ dados por $F(x, y) = (x, 2y)$, $G(x, y) = (y, x + y)$ e $H(x, y) = (0, x)$ formam um conjunto L.I. em $L(\mathbb{R}^2)$.

Exercício 3.16. Determinar se os seguinte operadores lineares do $\mathbb{R}^3$ são idempotentes ou nilpotentes ou nenhuma das duas coisas:

(a) $F(x, y, z) = (-x, -y, -z)$;

(b) $F(x, y, z) = (z, x, y)$;

(c) $F(x, y, z) = (x, 0, z)$;

(d) $F(x, y, z) = (0, 0, x)$.

Exercício 3.17. Sejam $F, G \in (\mathbb{R}^3)^*$ definidas por $F(x, y, z) = x - 3y + 2z$ e $G(x, y, z) = 2x - y + z$. Determine $F + G$, $2F + 3G$ e os seus respectivos núcleos.

Exercício 3.18. Determinar as bases duais de cada uma das seguintes bases:

(a) $\{(1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 2)\}$ do $\mathbb{R}^3$;

(b) $\{(1, 2), (0, 1)\}$ do $\mathbb{R}^2$;

(c) $\{(0, 1, 0, 0), (2, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 3)\}$ do $\mathbb{R}^4$;

(d) $\{1, t, 1 - t^2\}$ de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

Seção 3.5

Exercício 3.19. Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear dada por

$$T(x, y, z) = (x + z, y + z, x + y + 2z).$$

Encontre as matrizes de T com relação à base canônica, C , e com relação à base $B = \{(1, 1, 2), (-1, 1, 0), (-1, -1, 1)\}$.

Exercício 3.20. Seja $F \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ definida por $F(x, y, z) = (z, x + y)$. Determinar a matriz de F em relação às bases $B = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ de $\mathbb{R}^3$ e $C =$ base canônica do $\mathbb{R}^2$.

Exercício 3.21. * Determinar as matrizes das seguintes transformações lineares em relação às bases canônicas dos respectivos espaços vetoriais:

(a) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (x + y, z)$.

(b) $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, $T(x, y, z, t) = 2x + y - z + 3t$.

(c) $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x) = (x, 2x, 3x)$.

Exercício 3.22. Seja $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ operador linear dado por $(T(p))(t) = p(t) - p(1)$, $p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Se $B = \{1, t - 1, (t - 1)^2\}$ e $C = \{1, t, t^2\}$, encontre $[T]_{B,C}$, $[T]_B$ e $[T]_C$.

Exercício 3.23. Determinar o operador F do $\mathbb{R}^2$ cuja matriz em relação à base $B = \{(1, 1), (1, 2)\}$ é $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Exercício 3.24. Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ operador linear cuja matriz em relação à base $B = \{(1, 0), (1, 4)\}$ é $[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$. Determinar a matriz de T em relação à base canônica de $\mathbb{R}^2$.

Exercício 3.25. * Verificar matricialmente de o operador linear $F \in L(\mathbb{R}^3)$ dado por $F(x, y, z) = (x - y, 2y, y + z)$ é inversível. Se for, ache F^{-1} também por meio de matrizes.

Exercício 3.26. * Considere o operador linear em $\mathbb{R}^3$ tal que

$$T(1, 0, 0) = (1, 1, 1), \quad T(0, 0, 1) = (1, 0, 1), \quad T(0, 1, 2) = (0, 0, 4).$$

T é um isomorfismo? Se sim, obtenha o isomorfismo inverso.

Exercício 3.27. A aplicação linear $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$F(1, 0, 0) = (1, 1, 0), \quad F(0, 1, 0) = (0, 0, 1), \quad F(0, 0, 1) = (1, -1, 6)$$

é um isomorfismo?

Exercício 3.28. Considere os operadores lineares F e G do $\mathbb{R}^2$ dados por $F(x, y) = (x, x - y)$ e $G(x, y) = (x + y, 2x)$. Determinar as matrizes de $F + G$, $3F$, $F \circ G$ e F^2 em relação à base canônica.

Exercícios Resolvidos

Exercício 1. Verifique se $V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid y = x, z = w^2\}$, com as operações usuais de $\mathbb{R}^4$, é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Resolução:

Note que $(0, 0, 1, 1) \in V$, mas $-1 \cdot (0, 0, 1, 1) = (0, 0, -1, -1) \notin V$. Assim, V não é espaço vetorial.

Uma outra possibilidade de verificação seria a seguinte: $(0, 0, 1, 1) \in V$ e $(0, 0, 4, 2) \in V$, mas $(0, 0, 1, 1) + (0, 0, 4, 2) = (0, 0, 5, 3) \notin V$.

Exercício 2. Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz quadrada de ordem n . Verifique se $W = \{X \in M_{n \times 1}(\mathbb{R}) \mid AX = 0\}$ é um subespaço vetorial de $M_{n \times 1}(\mathbb{R})$, com as operações usuais.

Resolução:

SV1. Seja $0 = (0)_{n \times 1}$ a matriz $n \times 1$ nula. Como $A \cdot 0 = 0$, temos que $0 \in W$.

SV2 e SV3. Sejam $X, Y \in W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos

$$A(X + \lambda Y) = AX + A(\lambda Y) = AX + \lambda AY = 0 + \lambda 0 = 0.$$

Logo, $X + \lambda Y \in W$.

Portanto, W é subespaço vetorial de $M_{n \times 1}(\mathbb{R})$.

Exercício 3. Encontre o subespaço vetorial de $M_2(\mathbb{R})$ gerado por $S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Resolução:

Temos que $A \in [S]$ se, e somente se, existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$A = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$[S] = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid a = d = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercício 4. Sejam $U = \{p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \mid p'(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}\}$ e $W = \{p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \mid p(0) = p(1) = 0\}$ subespaços vetoriais de $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Encontre uma base para U , W , $U \cap W$ e $U + W$, no caso em que não se reduzam a $\{0\}$.

Resolução:

• U :

$$\begin{aligned} p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in U &\Leftrightarrow p'(t) = a_1 + 2a_2 t = 0 \\ &\Leftrightarrow a_1 = a_2 = 0 \Leftrightarrow p(t) = a_0 \Leftrightarrow p(t) \in [1]. \end{aligned}$$

Logo, $\{1\}$ é uma base de U e $\dim U = 1$.

• W :

$$\begin{aligned} p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 \in W &\Leftrightarrow \begin{cases} p(0) = a_0 = 0 \\ p(1) = a_0 + a_1 + a_2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow p(t) = a_1t - a_1t^2 = a_1(t - t^2) \Leftrightarrow p(t) \in [t - t^2]. \end{aligned}$$

Assim, $\{t - t^2\}$ é uma base de W e $\dim W = 1$.

• $U \cap W$:

$p(t) \in U \cap W = [1] \cap [t - t^2]$ se, e somente se, existem $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que $p(t) = \lambda = \mu(t - t^2)$.

Claramente, isso só é possível quando $\lambda = \mu = 0$, ou seja, quando $p(t) = 0$.

Assim, $U \cap W = \{0\}$ e $\dim U \cap W = 0$.

• $U + W$:

Temos

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim U \cap W = 1 + 1 - 0 = 2$$

e como a soma é direta, podemos tomar $\{1, t - t^2\}$ como base de $U + W$.

Exercício 5. Considere o seguinte subespaço de $M_2(\mathbb{R})$:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid x - y - z = 0 \right\}.$$

(a) Mostre que B dada pelas matrizes

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e C dada pelas matrizes

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

são bases de W .

(b) Encontre as matrizes de mudança da base B para a base C e da base C para a base B .

(c) Encontre uma base D de W , tal que a matriz

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

seja a matriz de mudança da base D para a base B , isto é, $P = M_D^B$.

Resolução:

(a)

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in W \Leftrightarrow x = y + z.$$

Assim, $A \in W$ se, e somente se, existirem $y, z, t \in \mathbb{R}$ tais que

$$A = y \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

isto é,

$$W = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = [B].$$

Note ainda que B é L.I., pois

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \lambda = 0.$$

Portanto, B forma uma base de W . Além disso, $\dim W = 3$.

Como C é formado por três vetores de W e $\dim W = 3$, basta verificar que C é L.I..

De fato,

$$\begin{aligned} \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \alpha + \beta & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \alpha = \beta = \lambda = 0. \end{aligned}$$

Portanto, C forma uma base de W .

(b) Note que

$$\begin{aligned} C_1 &= B_2 \\ C_2 &= -B_1 + B_2 \\ C_3 &= B_3 \end{aligned}$$

Logo,

$$M_B^C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quanto a M_C^B , vemos que

$$\begin{aligned} B_1 &= C_1 - C_2 \\ B_2 &= C_1 \\ B_3 &= C_3 \end{aligned}$$

Logo,

$$M_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Ou então $M_C^B = (M_B^C)^{-1}$).

(c) Seja $D = \{D_1, D_2, D_3\} \subset W$ de modo que D é base e $M_D^B = P$. Isto ocorre se, e somente se,

$$\begin{aligned} B_1 &= 1D_1 + 0D_2 + 0D_3 = D_1 \\ B_2 &= 1D_1 + 0D_2 + 3D_3 = D_1 + 3D_3 \\ B_3 &= 0D_1 + 2D_2 + 1D_3 = 2D_2 + D_3 \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} D_1 &= B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ D_3 &= \frac{B_2 - B_1}{3} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \\ D_2 &= \frac{1}{2} \left(B_3 - \frac{B_2 - B_1}{3} \right) = \frac{B_1 - B_2 + 3B_3}{6} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Portanto,

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Exercício 6. Encontre uma base para o núcleo e outra para a imagem de $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ dada por $T(p) = p' + p''$.

Resolução:

Note que

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in \ker T \Leftrightarrow (a_1 + 2a_2x) + 2a_2 = 0 \Leftrightarrow a_1 = a_2 = 0.$$

Dessa forma,

$$\ker T = \{p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \mid p(x) = a_0\} = [1]$$

ou seja, o polinômio 1 é uma base de $\ker T$.

Como $\{1, x, x^2\}$ é uma base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ que completa a base de $\ker T$, temos, pela demonstração do Teorema do Núcleo e da Imagem, que

$$T(x) = 1 \quad \text{e} \quad T(x^2) = 2x + 2$$

formam uma base de $\text{Im}T$.

Exercício 7. (a) Determinar uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ cujo núcleo seja gerado pelo vetor $(1, 1, 0)$.

(b) Determinar uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuja imagem seja gerada pelos vetores $(1, 2, 0)$ e $(1, 1, 1)$.

Resolução:

(a) A ideia a ser usada na resolução está contida na demonstração do Teorema do Núcleo e da Imagem.

O conjunto $\{(1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ que completa a base $\{(1, 1, 0)\}$ de $\ker T$. Se tomarmos $T(0, 1, 0)$ e $T(0, 0, 1)$ linearmente independentes teremos uma base de $\text{Im}T$. Fazemos então:

$$T(0, 1, 0) = (1, 0) \quad \text{e} \quad T(0, 0, 1) = (0, 1).$$

Como

$$(x, y, z) = x(1, 1, 0) + z(0, 0, 1) + (y - x)(0, 1, 0),$$

então

$$\begin{aligned} T(x, y, z) &= xT(1, 1, 0) + zT(0, 0, 1) + (y - x)T(0, 1, 0) \\ &= x(0, 0) + z(0, 1) + (y - x)(1, 0) \\ &= (y - x, z). \end{aligned}$$

(b) Como $\{(1, 2, 0), (1, 1, 1)\}$ é L.I. (verifique!), o subespaço gerado por estes vetores tem dimensão 2. Logo, pelo Teorema do Núcleo e da Imagem,

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T \Leftrightarrow 3 = \dim \ker T + 2 \Leftrightarrow \dim \ker T = 1.$$

Definamos, por exemplo,

$$T(1, 0, 0) = (1, 2, 0), \quad T(0, 1, 0) = (1, 1, 1) \quad \text{e} \quad T(0, 0, 1) = (0, 0, 0).$$

Ou seja,

$$T(x, y, z) = x(1, 2, 0) + y(1, 1, 1) = (x + y, 2x + y, y)$$

é linear e satisfaz a propriedade desejada.

Exercício 8. Mostre que $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $F(x, y, z) = (x + z, x - z, y)$ é um automorfismo. Determine F^{-1} .

Resolução: • F é linear (verifique!).

• Vamos determinar $\ker F$:

$$F(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ x - z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y, z) = (0, 0, 0).$$

Logo, $\ker F = \{(0, 0, 0)\}$ e F é injetora. Como $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $\dim \mathbb{R}^3 = \dim \mathbb{R}^3$, pelo Corolário 3.2.6 segue que F é um automorfismo.

• Supondo $F^{-1}(x, y, z) = (a, b, c)$, então $(x, y, z) = F(a, b, c) = (a + c, a - c, b)$. Logo,

$$\begin{cases} a + c = x \\ a - c = y \\ b = z \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{x + y}{2}, \quad b = z, \quad c = \frac{x - y}{2}.$$

Portanto

$$F^{-1}(x, y, z) = \left(\frac{x + y}{2}, z, \frac{x - y}{2} \right).$$

Note: outra forma de fazer seria usando a forma matricial da transformação.

Exercício 9. Seja $T : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ dada por $T(p(x)) = p'(x)$. Encontre a matriz de T com relação às bases canônicas de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ e $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

Resolução: Temos

$$\begin{aligned} T(1) &= 0 = 0 + 0x + 0x^2 \\ T(x) &= 1 = 1 + 0x + 0x^2 \\ T(x^2) &= 2x = 0 + 2x + 0x^2 \\ T(x^3) &= 3x^2 = 0 + 0x + 3x^2 \end{aligned}$$

Logo, a matriz de T com relação às bases canônicas é dada por

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercício 10. Determine o operador linear $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ cuja matriz em relação à base $B = \{(1, 1), (1, 2)\}$ é $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Resolução: Pela definição de matriz de uma transformação linear, temos:

$$F(1, 1) = 1(1, 1) + 1(1, 2) = (2, 3)$$

$$F(1, 2) = 0(1, 1) + 2(1, 2) = (2, 4)$$

Escrevamos (x, y) como combinação linear da base B :

$$\begin{aligned} (x, y) = a(1, 1) + b(1, 2) = (a + b, a + 2b) &\Leftrightarrow \begin{cases} x = a + b \\ y = a + 2b \end{cases} \\ &\Leftrightarrow a = 2x - y \quad \text{e} \quad b = y - x. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} F(x, y) &= (2x - y)F(1, 1) + (y - x)F(1, 2) \\ &= (2x - y)(2, 3) + (y - x)(2, 4) \\ &= (2x, 2x + y). \end{aligned}$$

Capítulo 4

Espaços com produto interno

4.1 Produtos internos

Em Geometria Analítica, é comum ver o conceito de “produto escalar” em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, a saber:

$$(x_1, x_2, x_3) \cdot (y_1, y_2, y_3) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3, \quad \forall (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Vamos generalizar essa definição, visando introduzir, entre outras coisas, o conceito de “distância” em situações bem gerais.

Definição 4.1.1. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$. Um **produto interno** sobre V é uma aplicação que a cada par $(u, v) \in V \times V$ associa um número real, denotado por $\langle u, v \rangle$, satisfazendo as seguintes condições:

- (a) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle, \quad \forall u, v, w \in V;$
- (b) $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } \forall u, v \in V;$
- (c) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle, \quad \forall u, v \in V;$
- (d) $\langle u, u \rangle > 0$, se $u \neq 0$.

O espaço vetorial V munido de um produto interno é chamado de **espaço euclidiano**.

Observação 4.1.2. Existem vários produtos internos diferentes sobre um mesmo espaço vetorial.

Exemplo 4.1.3. Produto interno usual do $\mathbb{R}^n$.

- (a) Se $u = (x_1, \dots, x_n)$ e $v = (y_1, \dots, y_n)$ são vetores genéricos do $\mathbb{R}^n$, então

$$(u, v) \mapsto \langle u, v \rangle = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$$

é um produto interno no $\mathbb{R}^n$.

(Verifique as 4 condições como exercício!)

- (b) Com relação ao produto interno do item (a), calcule $\langle (1, -1, 1), (0, 2, 4) \rangle$.

Temos:

$$\langle (1, -1, 1), (0, 2, 4) \rangle = 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 4 = 2.$$

Exemplo 4.1.4. (a) Em $\mathbb{R}^3$, defina

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y - 2, y_3) \rangle = \frac{x_1 y_1}{2} + \frac{x_2 y_2}{3} + \frac{x_3 y_3}{4}.$$

A aplicação acima define um produto interno em $\mathbb{R}^3$.

(Verifique as 4 condições como exercício!)

(b) Com relação ao produto interno do item (a), calcule $\langle (1, -1, 1), (0, 2, 4) \rangle$.

Temos:

$$\langle (1, -1, 1), (0, 2, 4) \rangle = \frac{1 \cdot 0}{2} + \frac{(-1) \cdot 2}{3} + \frac{1 \cdot 4}{4} = \frac{1}{3}.$$

Exemplo 4.1.5. Sobre o espaço $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, a aplicação dada por:

$$(f(t), g(t)) \mapsto \langle f(t), g(t) \rangle = \int_0^1 f(t) \cdot g(t) dt$$

é um produto interno, onde $f(t)$ e $g(t)$ são polinômios quaisquer de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$.

Propriedades 4.1.6. Seja V um espaço vetorial euclidiano. Valem as seguintes propriedades:

P1. $\langle 0, u \rangle = \langle u, 0 \rangle = 0, \quad \forall u \in V.$

P2. $\langle u, \alpha v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ e } \forall u, v \in V.$

P3. $\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle, \quad \forall u, v, w \in V.$

P4. Dados $m, n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left\langle \sum_{i=1}^m \alpha_i u_i, \sum_{j=1}^n \beta_j v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha_i \beta_j \langle u_i, v_j \rangle.$$

Demonstração:

P1. Já sabemos que $0 \cdot u = 0$, para todo $u \in V$. Logo,

$$\langle 0, u \rangle = \langle 0u, u \rangle \stackrel{(b)}{=} 0 \cdot \langle u, u \rangle = 0.$$

Como $\langle u, 0 \rangle = \langle 0, u \rangle$, então $\langle u, 0 \rangle = 0$.

P2. $\langle u, \alpha v \rangle \stackrel{(c)}{=} \langle \alpha v, u \rangle \stackrel{(b)}{=} \alpha \langle v, u \rangle \stackrel{(c)}{=} \alpha \langle u, v \rangle.$

P3. $\langle u, v + w \rangle \stackrel{(c)}{=} \langle v + w, u \rangle \stackrel{(a)}{=} \langle v, u \rangle + \langle w, u \rangle \stackrel{(c)}{=} \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle.$

P4. Basta fazer for indução (primeiro em m , depois em n) com base nas condições (a) e (b) e em P2 e P3.

□

Observação 4.1.7. 1. Quando nos referirmos a $\mathbb{R}^n$ como espaço euclidiano, fica subentendido que o produto interno é aquele do Exemplo 4.1.3, chamado de produto interno usual do $\mathbb{R}^n$.

2. Das propriedades anteriores e da definição, podemos observar que o produto interno é linear em cada variável (chamado bilinear).

4.2 Norma, distância e ortogonalidade

Norma

Definição 4.2.1. Seja V um espaço euclidiano. Para cada $u \in V$, definimos o número

$$||u|| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

o qual chamamos de **norma** de u .

Note: $\langle u, u \rangle \geq 0$, por isso podemos extrair a sua raiz quadrada.

Exemplo 4.2.2. Em $\mathbb{R}^n$, com o produto interno usual, a norma de $u = (x_1, \dots, x_n)$ é dada por

$$||u|| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

Proposição 4.2.3. *Seja V um espaço vetorial euclidiano. Temos:*

1. $||\alpha u|| = |\alpha| \cdot ||u||, \quad \forall u \in V, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$
2. $||u|| \geq 0, \quad \forall u \in V.$
3. $||u|| = 0$ se, e somente se, $u = 0$.
4. $|\langle u, v \rangle| \leq ||u|| \cdot ||v||, \quad \forall u, v \in V$ (**Desigualdade de Cauchy-Schwarz**).
5. $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||, \quad \forall u, v \in V$ (**Desigualdade triangular**).

Demonstração:

$$1. ||\alpha u|| = \sqrt{\langle \alpha u, \alpha u \rangle} = \sqrt{\alpha^2 \langle u, u \rangle} = |\alpha| \sqrt{\langle u, u \rangle} = |\alpha| \cdot ||u||.$$

2. Imediata, pois raiz quadrada é não negativa.

3. Se $u = 0$, então $||u|| = \sqrt{\langle 0, 0 \rangle} = 0$.

Reciprocamente, se $u \neq 0$ então $\langle u, u \rangle > 0$ e $||u|| = \sqrt{\langle u, u \rangle} > 0$.

4. Se $v = 0$, então $\langle u, v \rangle = 0$ e $||u|| \cdot ||v|| = 0$. Logo, tem-se uma igualdade neste caso. Suponha que $v \neq 0$. Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, temos $||u + \alpha v||^2 \geq 0$. Logo,

$$0 \leq \langle u + \alpha v, u + \alpha v \rangle = \langle u, u \rangle + 2\langle u, v \rangle \alpha + \langle v, v \rangle \alpha^2 = ||u||^2 + 2\alpha \langle u, v \rangle + ||v||^2 \alpha^2.$$

Como $||v||^2 \neq 0$, obtivemos um trinômio do segundo grau em α , o qual é sempre positivo. Dessa forma,

$$\Delta = (2\langle u, v \rangle)^2 - 4||v||^2 ||u||^2 \leq 0,$$

ou seja,

$$\langle u, v \rangle^2 \leq ||v||^2 \cdot ||u||^2.$$

Extraindo a raiz quadrada, obtemos

$$|\langle u, v \rangle| \leq ||u|| \cdot ||v||.$$

5. Usaremos a Desigualdade de Cauchy-Schwarz.

$$\begin{aligned} ||u + v||^2 &= \langle u + v, u + v \rangle = \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle \\ &= ||u||^2 + ||v||^2 + 2\langle u, v \rangle \\ &\leq ||u||^2 + ||v||^2 + 2||u|| ||v|| = (||u|| + ||v||)^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$||u + v|| \leq ||u|| + ||v||.$$

□

Exemplo 4.2.4. Em $\mathbb{R}^n$, a Desigualdade de Cauchy-Schwarz nos diz que

$$(x_1y_1 + \cdots + x_ny_n)^2 \leq (x_1^2 + \cdots + x_n^2) \cdot (y_1^2 + \cdots + y_n^2).$$

Essa desigualdade também é conhecida como Desigualdade de Lagrange.

Exercício 4.2.1. Sejam u e v vetores de um espaço euclidiano. Então:

(a) $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$ (**Identidade do Paralelogramo**).

(b) $\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 = 4\langle u, v \rangle$.

Distância

Definição 4.2.5. Seja V um espaço euclidiano. Dados $u, v \in V$, definimos a **distância** entre eles como

$$d(u, v) = \|u - v\|.$$

Propriedades 4.2.6. Num espaço euclidiano V temos:

P1. $d(u, v) \geq 0, \quad \forall u \in V$.

P2. $d(u, v) = 0$ se, e somente se, $u = v$.

P3. $d(u, v) = d(v, u)$.

P4. $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v), \quad \forall u, v, w \in V$.

Dessas propriedades, podemos dizer que a aplicação $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ é uma **métrica** sobre V , induzida pela norma.

Exemplo 4.2.7. Em $\mathbb{R}^4$ com o produto interno usual, calcule a distância entre os pontos $u = (1, 1, 3, 2)$ e $v = (2, 2, 1, 0)$.

Temos

$$d(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{(1-2)^2 + (1-2)^2 + (3-1)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{10}.$$

Ângulo

Sejam V um espaço euclidiano e $u, v \in V$ ambos não nulos. Pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\begin{aligned} |\langle u, v \rangle| &\leq \|u\| \cdot \|v\| \Leftrightarrow -\|u\| \cdot \|v\| \leq \langle u, v \rangle \leq \|u\| \cdot \|v\| \\ &\Leftrightarrow -1 \leq \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|} \leq 1. \end{aligned}$$

Logo, existe um único $\theta \in [0, \pi]$ real tal que

$$\cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}.$$

Este número θ é chamado de **ângulo** entre u e v .

Exemplo 4.2.8. Em $V = C([0, 2\pi]; \mathbb{R})$, defina $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$. Calcule o ângulo entre as funções $f(x) = \sin x$ e $g(x) = \cos x$.

Temos

$$\langle \sin, \cos \rangle = \int_0^{2\pi} \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \sin^2 x \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Assim, $\cos \theta = 0$ e, portanto, $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Ortogonalidade

Definição 4.2.9. Seja V um espaço euclidiano. Dizemos que dois **vetores** $u, v \in V$ são **ortogonais** se $\langle u, v \rangle = 0$.

Notação: $u \perp v$.

Diremos que um **conjunto** $S = \{u_1, \dots, u_n\} \subset V$ é **ortogonal** se $u_i \perp u_j$ quando $i \neq j$.

Diremos que um **conjunto** ortogonal $S = \{u_1, \dots, u_n\} \subset V$ é **ortonormal** se $\|u_j\| = 1$, $j = 1, \dots, n$.

Diremos que $u \in V$ é ortogonal a um subconjunto não-vazio S de V se u for ortogonal a todos os elementos de S .

Notação: $u \perp S$.

Exemplo 4.2.10. No espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ o conjunto $S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ é ortonormal.

Por exemplo,

$$\|(1, 0, 0)\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1$$

e

$$\langle (1, 0, 0), (0, 1, 0) \rangle = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0.$$

Em geral, o conjunto

$$\{(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)\}$$

é ortonormal no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, para todo $n \geq 2$.

Observação 4.2.11. 1. Se $u = 0$ ou $v = 0$, então $u \perp v$. Se $u \neq 0$ e $v \neq 0$, então $u \perp v$ se, e somente se, o ângulo entre u e v é $\frac{\pi}{2}$.

2. Se $S = \{u_1, \dots, u_n\} \subset V$ é um conjunto ortogonal com $u_j \neq 0$, $j = 1, \dots, n$, então $\left\{ \frac{u_1}{\|u_1\|}, \dots, \frac{u_n}{\|u_n\|} \right\}$ é um conjunto ortonormal.

Proposição 4.2.12. *Todo conjunto ortonormal $S = \{u_1, \dots, u_n\}$ contido num espaço vetorial euclidiano é necessariamente L.I..*

Demonstração:

Se $\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n = 0$, então tomando o produto interno desse vetor com u_1 e lembrando que $\langle u_1, u_1 \rangle = \|u_1\|^2 = 1$ e $\langle u_1, u_j \rangle = 0$, se $j = 2, \dots, n$, obtemos

$$0 = \langle 0, u_1 \rangle = \langle \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n, u_1 \rangle = \alpha_1 \langle u_1, u_1 \rangle + \dots + \alpha_n \langle u_n, u_1 \rangle = \alpha_1.$$

De maneira análoga, se prova que $\alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_n = 0$.

□

Definição 4.2.13. Se V é um espaço euclidiano de dimensão n e $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ for um conjunto ortonormal, então diremos que B é uma **base ortonormal** de V .

Proposição 4.2.14. *Sejam V um espaço euclidiano e $U = [u_1, \dots, u_n]$ o subespaço gerado por um conjunto ortonormal $S = \{u_1, \dots, u_n\}$. Então, para qualquer $u \in V$, o vetor*

$$v = u - \langle u, u_1 \rangle u_1 - \dots - \langle u, u_n \rangle u_n$$

é ortogonal a todo $w \in U$, isto é, $v \perp U$.

Demonstração:

Seja $w \in U$, então $w = \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j$. Precisamos mostrar que $\langle w, v \rangle = 0$, isto é,

$$\left\langle \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j, v \right\rangle = \sum_{j=1}^n \alpha_j \langle u_j, v \rangle = 0.$$

Logo, basta verificar que $\langle u_j, v \rangle = 0$, para cada $j = 1, \dots, n$.

De fato, como S é ortonormal, temos

$$\begin{aligned} \langle u_j, v \rangle &= \langle u_j, u - \langle u, u_1 \rangle u_1 - \dots - \langle u, u_n \rangle u_n \rangle \\ &= \langle u_j, u \rangle - \langle u, u_1 \rangle \langle u_j, u_1 \rangle - \dots - \langle u, u_n \rangle \langle u_j, u_n \rangle \\ &= \langle u_j, u \rangle - \langle u, u_j \rangle = 0. \end{aligned}$$

Portanto, o resultado segue. □

Teorema 4.2.15. (Processo de Ortonormalização de Gram-Schmidt) *Todo espaço vetorial euclidiano de dimensão finita ($\neq 0$) admite uma base ortonormal.*

Demonstração:

Se $\dim V = 1$ e se $\{u\}$ é uma base de V , então o vetor $g_1 = \frac{u}{\|u\|}$ é L.I. e tem norma igual a 1. Logo, $\{g_1\}$ é uma base ortonormal de V .

Se $\dim V = 2$, seja $\{u_1, u_2\}$ uma base de V . Façamos

$$g_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}.$$

Precisamos encontrar um vetor ortogonal a g_1 e que tenha norma 1. Pela proposição anterior, o vetor

$$v_2 = u_2 - \langle u_2, g_1 \rangle g_1$$

é ortogonal a g_1 . Logo, o vetor

$$g_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{u_2 - \langle u_2, g_1 \rangle g_1}{\|u_2 - \langle u_2, g_1 \rangle g_1\|}$$

também é ortogonal a g_1 , além de ser unitário. Logo, $\{g_1, g_2\}$ é uma base ortonormal de V .

O mesmo raciocínio nos permitirá construir uma base ortonormal em qualquer caso de dimensão finita n . □

Observação 4.2.16. No caso de um espaço euclidiano tridimensional, se $\{u_1, u_2, u_3\}$ formam uma base, então uma base ortonormal para este espaço pode ser dada por

$$g_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}, \quad g_2 = \frac{u_2 - \langle u_2, g_1 \rangle g_1}{\|u_2 - \langle u_2, g_1 \rangle g_1\|} \quad \text{e} \quad g_3 = \frac{u_3 - \langle u_3, g_1 \rangle g_1 - \langle u_3, g_2 \rangle g_2}{\|u_3 - \langle u_3, g_1 \rangle g_1 - \langle u_3, g_2 \rangle g_2\|}.$$

Exemplo 4.2.17. Aplicar o processo de ortonormalização de Gram-Schmidt à base $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 1, 2)\}$ do $\mathbb{R}^3$, considerado o produto interno usual nesse espaço. Note que $\|u_1\| = 1$, assim,

$$g_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = u_1 = (1, 0, 0).$$

Por outro lado,

$$v_2 = u_2 - \langle u_2, g_1 \rangle g_1 = (0, 1, 1) - 0 \cdot (1, 0, 0) = (0, 1, 1).$$

Logo,

$$g_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{(0, 1, 1)}{\sqrt{2}} = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} v_3 &= u_3 - \langle u_3, g_1 \rangle g_1 - \langle u_3, g_2 \rangle g_2 \\ &= (0, 1, 2) - 0 \cdot (1, 0, 0) - \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Daí,

$$g_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}} = \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Portanto,

$$\left\{ (1, 0, 0), \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right\}$$

é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, construída a partir da base B .

Definição 4.2.18. Sejam V um espaço vetorial euclidiano e U um subespaço vetorial de V . O **complemento ortogonal** de U é o conjunto

$$U^\perp = \{v \in V \mid \langle u, v \rangle = 0, \forall u \in U\}.$$

Proposição 4.2.19. $U^\perp$ é um subespaço vetorial de V .

Demonstração:

Temos que $0 \in U^\perp$, pois $\langle 0, u \rangle = 0$ para todo $u \in U$.

Além disso, se $v, w \in U^\perp$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então pra todo $u \in U$, temos

$$\langle v + \lambda w, u \rangle = \langle v, u \rangle + \lambda \langle w, u \rangle = 0.$$

Logo, $v + \lambda w \in U^\perp$.

□

Observação 4.2.20. Se V tem dimensão finita, então $u \in U^\perp$ se, e somente se, u é ortogonal a todos os vetores de uma base qualquer de U .

Exemplo 4.2.21. Seja $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z = 0\}$, determine $U^\perp$.

Temos que

$$(x, y, z) \in U \Leftrightarrow (x, y, z) = (y + z, y, z) = y(1, 1, 0) + z(1, 0, 1).$$

Assim, $\{(1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$ é uma base para U .

Logo, $(x, y, z) \in U^\perp$ se, e somente se,

$$\langle (x, y, z), (1, 1, 0) \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle (x, y, z), (1, 0, 1) \rangle = 0$$

ou seja,

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y, z) = x(1, -1, -1).$$

Portanto, $U^\perp = [(1, -1, -1)]$.

Teorema 4.2.22. Sejam V um espaço euclidiano de dimensão finita e U um subespaço vetorial de V . Então $V = U \oplus U^\perp$.

Demonstração:

- $V = U + U^\perp$

Seja $B = \{g_1, \dots, g_r\}$ um base ortonormal de U . Dado $u \in V$, pela Proposição 4.2.14, o vetor

$$v = u - \langle u, g_1 \rangle g_1 - \dots - \langle u, g_r \rangle g_r \in U^\perp.$$

Logo,

$$u = \langle u, g_1 \rangle g_1 + \dots + \langle u, g_r \rangle g_r + v \in U + U^\perp$$

e então $V \subseteq U + U^\perp$. Assim, $V = U + U^\perp$.

- $U \cap U^\perp = \{0\}$.

Seja $w \in U \cap U^\perp$. Como $w \in U^\perp$, então w é ortogonal a todo vetor de U . Em particular, $\langle w, w \rangle = 0$. Logo, $w = 0$ e então $U \cap U^\perp = \{0\}$. □

Conforme acabamos de ver, se $B = \{g_1, \dots, g_r\}$ é uma base ortonormal de um subespaço U de um espaço euclidiano V de dimensão finita, então todo vetor $u \in V$ se decompõe, de maneira única, em duas parcelas, uma de U e uma de $U^\perp$, ortogonais entre si:

$$u = (\langle u, g_1 \rangle g_1 + \dots + \langle u, g_r \rangle g_r) + v.$$

A parcela

$$\langle u, g_1 \rangle g_1 + \dots + \langle u, g_r \rangle g_r$$

recebe o nome de **projeção ortogonal** de u sobre o subespaço U .

Por outro lado, a **aplicação** $E : V \rightarrow V$ dada por

$$E(u) = \langle u, g_1 \rangle g_1 + \dots + \langle u, g_r \rangle g_r$$

recebe o nome de **projeção ortogonal** de V sobre U .

Pode-se mostrar que:

- E é um operador linear;
- $E^2(u) = E(u), \quad \forall u \in V$.

Além disso,

- $\ker(E) = \{u \in V \mid \langle u, g_1 \rangle g_1 + \dots + \langle u, g_r \rangle g_r = 0\} = U^\perp$
- $\text{Im}(E) = U$.

Logo,

$$V = \text{Im}(E) \oplus \ker(E)$$

4.3 Isometrias

Nesta seção, veremos um tipo de aplicação que é compatível com o produto interno e, por sua vez, preservam distâncias.

Definição 4.3.1. Sejam U e V espaços euclidianos. Dizemos que $T \in \mathcal{L}(U, V)$ é uma **isometria** se

$$\langle T(u_1), T(u_2) \rangle_V = \langle u_1, u_2 \rangle_U, \quad \forall u_1, u_2 \in U.$$

Exemplo 4.3.2. A rotação $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta),$$

onde $\theta \in \mathbb{R}$, é uma isometria.

De fato, T é uma transformação linear (verifique como exercício) e

$$\begin{aligned} \langle T(x_1, y_1), T(x_2, y_2) \rangle &= \langle (x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta, x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta), (x_2 \cos \theta - y_2 \sin \theta, x_2 \sin \theta + y_2 \cos \theta) \rangle \\ &= x_1 x_2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) - y_1 x_2 (-\cos \theta \sin \theta + \cos \theta \sin \theta) \\ &\quad - x_1 y_2 (\cos \theta \sin \theta - \cos \theta \sin \theta) + y_1 y_2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\ &= x_1 x_2 + y_1 y_2 = \langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle. \end{aligned}$$

Teorema 4.3.3. Sejam U e V espaços euclidianos e $T \in \mathcal{L}(U, V)$. São equivalentes:

- (i) T é uma isometria;
- (ii) $\|T(u)\|_V = \|u\|_U, \forall u \in U$;
- (iii) $\|T(u) - T(v)\|_V = \|u - v\|_U, \forall u, v \in U$;
- (iv) Se $\{u_1, \dots, u_n\}$ é um conjunto ortonormal de U , então $\{T(u_1), \dots, T(u_n)\}$ é um conjunto ortonormal de V .

Demonstração:

(i) $\Rightarrow$ (ii) Como T é isometria, temos que $\langle T(u), T(v) \rangle = \langle u, v \rangle$, para todo $u, v \in U$. Em particular, tomando $u = v$,

$$\|T(u)\|_V^2 = \langle T(u), T(u) \rangle = \langle u, u \rangle = \|u\|_U^2,$$

ou seja, $\|T(u)\|_V = \|u\|_U$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Para todo $u, v \in U$, temos

$$\|T(u) - T(v)\|_V = \|T(u - v)\|_V = \|u - v\|_U.$$

(iii) $\Rightarrow$ (i) Note que

$$\|T(u) + T(v)\| = \|T(u) - T(-v)\| = \|u - (-v)\| = \|u + v\|.$$

Do Exercício 4.2.1 (b),

$$\begin{aligned} \langle T(u), T(v) \rangle &= \frac{1}{4}(\|T(u) + T(v)\|^2 - \|T(u) - T(v)\|^2) \\ &= \frac{1}{4}(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2) = \langle u, v \rangle. \end{aligned}$$

(i) $\Rightarrow$ (iv) Se $\{u_1, \dots, u_n\}$ é um conjunto ortonormal de U , então, como T é uma isometria, temos

$$\langle T(u_i), T(u_j) \rangle = \langle u_i, u_j \rangle = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

ou seja, $\{T(u_1), \dots, T(u_n)\}$ é um conjunto ortonormal.

(iv) $\Rightarrow$ (i) Seja $\{u_1, \dots, u_n\}$ uma base ortonormal de U . Por hipótese, $\{T(u_1), \dots, T(u_n)\}$ é um conjunto ortonormal.

Dados $u, v \in U$, escrevemos

$$u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n \quad \text{e} \quad v = \beta_1 u_1 + \dots + \beta_n u_n$$

e obtemos: por um lado

$$\begin{aligned} \langle T(u), T(v) \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i T(u_i), \sum_{j=1}^n \beta_j T(u_j) \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \beta_j \langle T(u_i), T(u_j) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i, \end{aligned}$$

por outro lado,

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i, \sum_{j=1}^n \beta_j u_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \beta_j \langle u_i, u_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i. \end{aligned}$$

Comparando as expressões acima, concluímos que T é isometria. □

Corolário 4.3.4. *Sejam U e V espaços euclidianos. Se $T \in \mathcal{L}(U, V)$ é uma isometria, então T é injetora.*

Demonstração:

De fato, se $T(u) = 0$, então $\|u\| = \|T(u)\| = 0$. Portanto, $u = 0$. □

Corolário 4.3.5. *Sejam U e V espaços euclidianos. Se $T \in \mathcal{L}(U, V)$ é uma isometria e $\dim U = \dim V$, então T é um isomorfismo.*

Demonstração:

Como U e V tem a mesma dimensão e T é injetora, segue que T é uma bijeção e, portanto, um isomorfismo. □

4.4 Operadores Auto-Adjuntos

Definição 4.4.1. Sejam U um espaço vetorial euclidiano e $T \in \mathcal{L}(U)$. Dizemos que T é um **operador auto-adjunto** se

$$\langle T(u), v \rangle = \langle u, T(v) \rangle,$$

para todo $u, v \in U$.

Exemplo 4.4.2. Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ dado por $T(x, y) = (ax + by, bx + cy)$. Verifique que T é um operador auto-adjunto.

Temos

$$\langle T(x, y), (z, t) \rangle = \langle (ax + by, bx + cy), (z, t) \rangle = axz + byz + bxt + c yt$$

e

$$\langle (x, y), T(z, t) \rangle = \langle (x, y), (az + bt, bz + ct) \rangle = axz + bxt + byz + c yt$$

Comparando as expressões vemos que

$$\langle T(x, y), (z, t) \rangle = \langle (x, y), T(z, t) \rangle$$

e, portanto, T é m operador auto-adjunto.

Note: a matriz do operador do exemplo anterior com relação à base canônica é uma matriz simétrica. Isso não é coincidência, como veremos no próximo teorema.

Teorema 4.4.3. *Seja U um espaço euclidiano de dimensão finita. Então, um operador $T \in \mathcal{L}(U)$ é auto-adjunto se, e somente se, a matriz de T com relação a uma base ortonormal de U é simétrica.*

Demonstração:

($\Rightarrow$) Suponha que T seja auto-adjunto e seja $A = (a_{ij})$ a matriz de T com relação a alguma base ortonormal $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ de U . Queremos mostrar que $a_{ij} = a_{ji}$.

Temos

$$T(u_k) = a_{1k}u_1 + \dots + a_{nk}u_n$$

para todo $k = 1, \dots, n$. Se $i, j \in \{1, \dots, n\}$, então

$$\langle T(u_i), u_j \rangle = a_{1i}\langle u_1, u_j \rangle + \dots + a_{ni}\langle u_n, u_j \rangle = a_{ji} \quad (4.1)$$

e

$$\langle u_i, T(u_j) \rangle = a_{1j}\langle u_i, u_1 \rangle + \dots + a_{nj}\langle u_i, u_n \rangle = a_{ij} \quad (4.2)$$

Como T é auto-adjunto, segue que $a_{ji} = a_{ij}$.

($\Leftarrow$) Reciprocamente, suponha que a matriz (a_{ij}) de T com relação a uma base ortonormal $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ seja simétrica. Devemos mostrar que $\langle T(u), v \rangle = \langle u, T(v) \rangle$.

Sejam

$$u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n \quad \text{e} \quad v = \beta_1 u_1 + \dots + \beta_n u_n$$

então, como o produto interno é linear em cada variável e a base acima é ortogonal, temos

$$\langle T(u), v \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i T(u_i), \sum_{j=1}^n \beta_j u_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \beta_j \langle T(u_i), u_j \rangle$$

e, analogamente,

$$\langle u, T(v) \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \beta_j \langle u_i, T(u_j) \rangle.$$

Dessa forma, basta mostrar que $\langle T(u_i), u_j \rangle = \langle u_i, T(u_j) \rangle$.

Como (a_{ij}) é a matriz de T com relação à base B , temos, por (4.1) e (4.2), que

$$a_{ij} = \langle u_i, T(u_j) \rangle \quad \text{e} \quad a_{ji} = \langle T(u_i), u_j \rangle$$

e, como a matriz é simétrica, o resultado segue. □

4.5 Exercícios

Seções 4.1 e 4.2

Exercício 4.1. Considerando o espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$, calcular $\langle u, v \rangle$ nos seguintes casos:

- (a) $u = \left(\frac{1}{2}, 2, 1\right)$ e $v = (4, 1, -3)$
- (b) $u = (2, 1, 0)$ e $v = (4, 0, 2)$;
- (c) $u = (1, 1, 1)$ e $v = (2, -1, 5)$.

Exercício 4.2. Seja V um espaço euclidiano. Mostre que a aplicação

$$(u, v) \rightarrow u * v = 2\langle u, v \rangle$$

também é um produto interno sobre V . É possível generalizar esse resultado? Como?

Exercício 4.3. * Sejam $u = (x_1, x_2)$ e $v = (y_1, y_2)$ vetores genéricos do $\mathbb{R}^2$.

- (a) Mostre que $\langle u, v \rangle = x_1 y_1 - 2x_1 y_2 - 2x_2 y_1 + 5x_2 y_2$ define um produto interno sobre $\mathbb{R}^2$.
- (b) Determine a norma de $u = (1, 2)$ em relação ao produto interno usual e também em relação ao produto interno definido em (a).

Exercício 4.4. Sejam u e v vetores de um espaço euclidiano. Mostre as identidades a seguir:

1. $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$ (Identidade do Paralelogramo).
2. $\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 = 4\langle u, v \rangle$.

Exercício 4.5. Achar o ângulo entre os seguintes vetores do $\mathbb{R}^3$:

- (a) $u = (1, 1, 1)$ e $v = \left(\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}\right)$;
- (b) $u = (1, -1, 0)$ e $v = (2, -1, 2)$.

Exercício 4.6. Chama-se **traço** de uma matriz quadrada $A = (a_{ij})$ de ordem n a soma dos termos da sua diagonal principal. Notação: $\text{tr}(A)$.

Seja $V = M_{m \times n}(\mathbb{R})$, mostre que $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^t A)$ define um produto interno sobre V .

Exercício 4.7. Para cada um dos itens abaixo, determinar: $\langle u, v \rangle$, $\|u\|$, $\|v\|$ e o ângulo entre u e v .

(a) $V = \mathbb{R}^2$, com o produto interno usual, $u = (1, 2, 1)$ e $v = (3, 4, 2)$.

(b) $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, com o produto interno $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t)dt$, $u = p(t) = 1 + t + 4t^2$ e $v = q(t) = 2 + 5t^2$.

(c) $V = M_2(\mathbb{R})$, com o produto interno $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^t B)$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Seção 4.3

Exercício 4.8. Consideremos no espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ o produto interno dado por $\langle u, v \rangle = x_1 y_1 + 2x_2 y_2$, para todo par de vetores $u = (x_1, x_2)$, $v = (y_1, y_2)$. Verificar se u e v são ortogonais, em relação a esse produto interno, nos seguintes casos:

(a) $u = (1, 1)$ e $v = (2, -1)$;

(b) $u = (2, 1)$ e $v = (-1, 1)$;

(c) $u = (3, 2)$ e $v = (2, -1)$.

Exercício 4.9. Determinar m a fim de que os vetores $u = (m + 1, 2)$ e $v = (-1, 4)$ do $\mathbb{R}^2$ sejam ortogonais (considere o produto interno usual).

Exercício 4.10. Considere em $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ o produto interno definido do seguinte modo

$$\left\langle \sum_{i=0}^2 a_i t^i, \sum_{i=0}^2 b_i t^i \right\rangle = \sum_{i=0}^2 a_i b_i,$$

para todo par de polinômios $f(t) = \sum_{i=0}^2 a_i t^i$ e $g(t) = \sum_{i=0}^2 b_i t^i$ desse espaço. A base canônica $\{1, t, t^2\}$ de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ é ortonormal em relação a esse produto?

Exercício 4.11. * Ortonormalize a base $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (1, -1, 1)$, $u_3 = (-1, 0, 1)$ do $\mathbb{R}^3$, pelo processo de Gram-Schmidt.

Exercício 4.12. Achar uma base do subespaço $V^\perp$, onde V é o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado por $(1, 0, 1, 1)$ e $(1, 1, 2, 0)$. Ortonormalize esta base.

Exercício 4.13. Seja $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y = 0\}$. Determinar uma base ortonormal de W .

Exercício 4.14. Seja $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0\}$. Determinar uma base ortonormal de W .

Exercício 4.15. Mostre que $T \in L(\mathbb{R}^2)$ definida por $T(x, y) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y, \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \right)$ é uma isometria.

Exercício 4.16. Verifique se $T : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ dada por $T(A) = A^t$ é uma isometria.

Capítulo 5

Diagonalização de operadores lineares

5.1 Autovalores e Autovetores

Definição 5.1.1. Seja V um espaço vetorial e seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear. Dizemos que um vetor $u \in V$, $u \neq 0$, é um **autovetor** de T se existir $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $T(u) = \lambda u$. Neste caso, λ é chamado de **autovalor** de T associado a u .

Observação 5.1.2. O escalar λ é univocamente determinado por T e u .

Pois

$$T(u) = \lambda u = \lambda' u \Leftrightarrow (\lambda - \lambda')u = 0 \Leftrightarrow \lambda = \lambda'.$$

△

Definição 5.1.3. Sejam V um espaço vetorial, $T \in \mathcal{L}(V)$ e λ um autovalor de T . O conjunto

$$V(\lambda) = \{u \in V \mid T(u) = \lambda u\} = \ker(T - \lambda I)$$

é chamado de **subespaço próprio do autovalor** λ .

Se $\dim V$ é finita, diremos que a dimensão de $V(\lambda)$ é a **multiplicidade geométrica** de λ .

Exemplo 5.1.4. Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (y, 4x)$. Encontre os autovalores de T , os respectivos subespaços próprios e a multiplicidade geométrica de cada autovalor.

Temos que $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor de T se, e somente se, existir $(x, y) \neq (0, 0)$ tal que $T(x, y) = \lambda(x, y)$, ou seja,

$$(y, 4x) = (\lambda x, \lambda y).$$

Isto equivale a que o sistema

$$\begin{cases} y - \lambda x = 0 \\ 4x - \lambda y = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} -\lambda x + y = 0 \\ 4x - \lambda y = 0 \end{cases}$$

possua uma solução não trivial. Isto acontece se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 4 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 2.$$

Logo, os únicos autovalores de T são $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 2$.

Temos

$$\begin{aligned} V(-2) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (y, 4x) = -2(x, y)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -2x\} \\ &= [(1, -2)]. \end{aligned}$$

Assim, a multiplicidade geométrica de -2 é um.

Também

$$\begin{aligned} V(2) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (y, 4x) = 2(x, y)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x\} \\ &= [(1, 2)]. \end{aligned}$$

Assim, a multiplicidade geométrica de 2 é um.

Além disso, $(1, -2)$ é um autovetor associado ao autovalor -2 e $(1, 2)$ é um autovetor associado ao autovalor 2 .

Observação 5.1.5. Nem sempre existem autovalores associados a uma transformação T .

Exercício 5.1.1. Faça o mesmo do exemplo anterior para a transformação $T(x, y) = (-y, x)$.

5.2 Polinômio característico

Definição 5.2.1. Dada uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$, definimos o **polinômio característico** de A como sendo o determinante

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I),$$

onde I é a matriz identidade de ordem n .

Definição 5.2.2. Sejam $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Dizemos que A e B são matrizes semelhantes se existir $M \in M_n(\mathbb{R})$ invertível tal que $A = M^{-1}BM$.

Proposição 5.2.3. *Matrizes semelhantes tem o mesmo polinômio característico.*

Demonstração:

Se A e B são matrizes semelhantes, então existe uma matriz inversível M tal que $B = M^{-1}AM$. Daí,

$$\begin{aligned} p_B(\lambda) &= \det(B - \lambda I) = \det(M^{-1}AM - \lambda I) = \det(M^{-1}AM - \lambda M^{-1}IM) \\ &= \det(M^{-1}(A - \lambda I)M) = \det(M^{-1}) \cdot \det(A - \lambda I) \cdot \det(M) \\ &= \det(A - \lambda I) = p_A(\lambda). \end{aligned}$$

□

Essa proposição torna válida a seguinte definição:

Definição 5.2.4. Seja V um espaço vetorial de dimensão n e $T : V \rightarrow V$ um operador linear. Chama-se **polinômio característico de T** o polinômio característico da matriz de T em relação a qualquer base de V .

Notação: $p_T(\lambda)$.

Lembre-se: matrizes do mesmo operador são sempre semelhantes, pois

$$[T]_C = M_C^B [T]_B M_B^C = [M_B^C]^{-1} [T]_B M_B^C,$$

onde B e C são bases de V .

Proposição 5.2.5. *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(V)$. Então, λ é um autovalor de T se, e somente se, $p_T(\lambda) = 0$. Em outras palavras, os autovalores de T são as raízes reais de seu polinômio característico.*

Demonstração:

Fixe B uma base de V .

Suponha que λ seja um autovalor de T , então existe $u \neq 0$ tal que $T(u) = \lambda u$, ou seja, $(T - \lambda I)(u) = 0$. Assim, a transformação linear $T - \lambda I : V \rightarrow V$ não é injetora e, consequentemente, não é um isomorfismo. Daí, $[T - \lambda I]_B$ não é invertível ou, equivalentemente,

$$p_T(\lambda) = \det[T - \lambda I]_B = 0.$$

Reciprocamente, se $p_T(\lambda) = 0$, então a matriz $[T - \lambda I]_B$ tem determinante nulo. Daí, a transformação $T - \lambda I : V \rightarrow V$ não é um isomorfismo e, portanto, não é injetora. Logo, existe $u \neq 0$ tal que $(T - \lambda I)(u) = 0$, ou seja, $T(u) = \lambda u$. Portanto, λ é um autovalor de T . □

Exemplo 5.2.6. Encontre os autovalores de $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (y, 4x)$.

Note que

$$T(1, 0) = (0, 4) \quad \text{e} \quad T(0, 1) = (1, 0),$$

então a matriz de T á base canônica é $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$. Logo,

$$p_T(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 4 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 4$$

cujas raízes em $\mathbb{R}$ são $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -2$.

Definição 5.2.7. Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(V)$. Se λ é um autovalor de T , definimos a multiplicidade algébrica de λ como sendo a multiplicidade de λ como raiz do polinômio característico de T .

Proposição 5.2.8. *Sejam V um espaço vetorial e $T \in \mathcal{L}(V)$. Se λ é um autovalor de T , então a sua multiplicidade geométrica não excede a sua multiplicidade algébrica.*

5.3 Diagonalização de operadores

Motivação:

Vamos examinar dois operadores do $\mathbb{R}^2$ que se comportam de maneira diferente quanto aos autovalores: $T(x, y) = (y, x)$ e $S(x, y) = (x + y, y)$, cujas matrizes em relação à base canônica são

$$[T] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [S] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Os polinômios característicos respectivos são

$$p_T(\lambda) = \lambda^2 - 1 \quad \text{e} \quad p_S(\lambda) = (1 - \lambda)^2,$$

cujas raízes são

$$p_T(\lambda) : 1 \text{ e } -1 \quad \text{e} \quad p_S(\lambda) : 1 \text{ (dupla)}.$$

Os autovetores de T são: $v_1 = (1, 1)$, associado a 1 , e $v_2 = (1, -1)$, associado a -1 . Note que $\{v_1, v_2\}$ é L.I.. Logo, $\{v_1, v_2\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$.

Os autovalores de S devem satisfazer $S(x, y) = (x, y)$, que equivale ao sistema:

$$\begin{cases} x + y = x \\ y = y \end{cases}$$

cuja solução geral é $y = 0$, isto é, $u_1 = (1, 0)$ é um autovetor associado a 1 . Então é impossível formar uma base de $\mathbb{R}^2$ com autovetores de S , contrariamente ao que se verificou com o operador T .

No caso do operador T , se $B = \{v_1, v_2\}$, então

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Mais ainda, sendo $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ a matriz de mudança de base da base canônica para a base B , temos $[T]_B = M^{-1}[T]M$.

Em resumo: existe uma base do $\mathbb{R}^2$ em relação à qual a matriz de T é diagonal. Tal fato não ocorre com a matriz do operador S . Em outras palavras, a matriz de T é semelhante a uma matriz diagonal, o que não acontece com a matriz de S .

Faremos a seguir um estudo breve dos operadores que podem ser diagonalizados, conforma o operador T acima.

Definição 5.3.1. Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(V)$. Dizemos que T é diagonalizável se existir uma base de V formada por autovetores de T .

Se $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ for uma base formada de autovetores de T , então

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

onde $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ são os autovalores de T . Segue daí que

$$p_T(x) = \det \begin{pmatrix} \lambda_1 - x & & 0 \\ & \lambda_2 - x & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda_n - x \end{pmatrix} = (\lambda_1 - x)(\lambda_2 - x) \cdots (\lambda_n - x)$$

e, assim, $p_T(x)$ se decompõe em fatores lineares.

Teorema 5.3.2. Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(V)$. Então T é diagonalizável se, e somente se, os autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de T forem tais que

$$V = V(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_n).$$

Observação 5.3.3. Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$. Se B indica a base canônica do $\mathbb{R}^n$, então existe $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tal que $[T]_B = A$. A matriz A se diz **diagonalizável** se, e somente se, T é diagonalizável; isto é, quando existe uma base B_1 de $\mathbb{R}^n$ tal que $[T]_{B_1} = D$ é diagonal. Essa base B_1 , como vimos, é formada por autovetores de T .

Mas, sendo A e D matrizes de um mesmo operador linear, se indicarmos por M a matriz mudança de base de B para B_1 , então

$$D = M^{-1}AM.$$

Se $B_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$, então

$$M = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}.$$

Quer dizer, as componentes do i -ésimo autovetor de B_1 formam a i -ésima coluna de M , $i = 1, \dots, n$.

Exemplo 5.3.4. Considere as transformações lineares do $\mathbb{R}^2$ dadas por

$$T(x, y) = (y, x) \quad \text{e} \quad S(x, y) = (x + y, y).$$

- Para T : $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$ são os autovalores e

$$V(1) \oplus V(-1) = [(1, 1)] \oplus [(1, -1)] = [(1, 1), (1, -1)] = \mathbb{R}^2.$$

Logo, T é diagonalizável.

- Para S : $\lambda = 1$ é autovalor e

$$V(1) = [(1, 0)] \neq \mathbb{R}^2.$$

Logo, S não é diagonalizável.

Teorema 5.3.5. *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(V)$. Então, T é diagonalizável se, e somente se,*

1. *o polinômio característico de T tem todas as suas raízes em $\mathbb{R}$;*
2. *a multiplicidade algébrica de cada autovalor λ_i de T é igual à sua multiplicidade geométrica (isto é, igual à dimensão de $V(\lambda_i)$).*

Exemplo 5.3.6. Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por

$$T(x, y, z) = (x + z, y + z, x + y + 2z).$$

Note que T é linear e sua matriz com relação à base canônica é

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Então

$$\begin{aligned} p_T(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2 - \lambda \end{pmatrix} = (1 - \lambda)(1 - \lambda)(2 - \lambda) - (1 - \lambda) - (1 - \lambda) \\ &= \dots = \lambda(1 - \lambda)(\lambda - 3), \end{aligned}$$

que tem todas as suas raízes em $\mathbb{R}$. Logo, os autovalores de T são $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = 3$, todos com multiplicidade algébrica igual a 1.

Vamos, agora, encontrar autovetores associados a esses autovalores.

• Para $\lambda_1 = 0$: Precisamos encontrar $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ não nulo tal que $T(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Temos

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = -z \\ x + y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = -z.$$

Assim, podemos tomar como autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = 0$, o vetor $u = (1, 1, -1)$. Logo, $V(0) = [(1, 1, -1)]$ e a multiplicidade geométrica de $\lambda_1 = 0$ é 1.

• Para $\lambda_2 = 1$: Precisamos encontrar $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ não nulo tal que $T(x, y, z) = (x, y, z)$. Temos

$$\begin{cases} x + z = x \\ y + z = y \\ x + y + 2z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = -y \end{cases}$$

Assim, podemos tomar como autovetor associado ao autovalor $\lambda_2 = 1$, o vetor $v = (1, -1, 0)$. Logo, $V(1) = [(1, -1, 0)]$ e a multiplicidade geométrica de $\lambda_2 = 1$ é 1.

• Para $\lambda_3 = 3$: Precisamos encontrar $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ não nulo tal que $T(x, y, z) = (3x, 3y, 3z)$. Temos

$$\begin{cases} x + z = 3x \\ y + z = 3y \\ x + y + 2z = 3z \end{cases} \Leftrightarrow z = 2x = 2y.$$

Assim, podemos tomar como autovetor associado ao autovalor $\lambda_3 = 3$, o vetor $w = (1, 1, 2)$. Logo, $V(3) = [(1, 1, 2)]$ e a multiplicidade geométrica de $\lambda_3 = 3$ é 1.

Portanto, pelo Teorema, T é diagonalizável. A matriz de T com relação à base $\{u, v, w\}$ é dada por

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Além disso, a matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

é tal que $M^{-1}AM = D$.

Exemplo 5.3.7. Verifique se $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ dada por

$$T(p(t)) = p''(t) - 2p'(t) + p(t)$$

é diagonalizável.

Seja $C = \{1, x, x^2\}$ a base canônica de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Note que

$$\begin{aligned} T(1) &= 0 - 2 \cdot 0 + 1 = 1 \\ T(x) &= 0 - 2 \cdot 1 + x = -2 + x \\ T(x^2) &= 2 - 2 \cdot 2x + x^2 = 2 - 4x + x^2 \end{aligned}$$

e então a matriz de T com relação à C é dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$p_T(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & -4 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^3$$

e, desta forma, 1 é o único autovalor de T e tem multiplicidade algébrica 3.

Agora, vamos determinar $V(1)$. Temos

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in V(1) &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow y = z = 0 \end{aligned}$$

Logo, $V(1) = [(1, 0, 0)]$ e então a multiplicidade geométrica de 1 é 1.

Portanto, como $3 \neq 1$, T não é diagonalizável.

5.4 Exercícios

Seções 5.1 e 5.2

Exercício 5.1. * Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (x, y, x)$. Encontre os autovalores de T e os respectivos subespaços próprios e a multiplicidade geométrica de cada autovalor.

Exercício 5.2. Encontre os autovalores e autovetores do operador linear $T : V \rightarrow V$ nos seguintes casos:

(a) $V = \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x + y, x - y)$.

(b) $V = \mathbb{R}^3$, $T(1, 0, 0) = (2, 0, 0)$, $T(0, 1, 0) = (2, 1, 2)$, $T(0, 0, 1) = (3, 2, 1)$.

(c) $V = \mathbb{R}^4$ e $[T]_B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, onde B é a base canônica do $\mathbb{R}^4$.

Seção 5.3

Exercício 5.3. * Verifique se $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ dada por

$$T(x, y, z, t) = (x + y, y, 2z + t, 2z + t)$$

é diagonalizável. Encontre também os autoespaços de T .

Exercício 5.4. Determine $M \in M_2(\mathbb{R})$, se existir, de modo que $M^{-1}AM$ seja uma matriz diagonal nos seguintes casos.

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Exercício 5.5. Verificar, em cada um dos itens abaixo, se o operador $T \in L(\mathbb{R}^3)$ dado pela sua matriz com relação à base canônica é diagonalizável:

(a) $[T]_C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

(b) $[T]_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m & 2 & 0 \\ n & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Capítulo 6

Formas bilineares e quadráticas

6.1 Formas bilineares

Definição 6.1.1. Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$. Uma função $f : U \times V \rightarrow \mathbb{R}$ é uma **forma bilinear** se satisfaz

(a) $f(u_1 + u_2, v) = f(u_1, v) + f(u_2, v);$

(b) $f(\lambda u, v) = \lambda f(u, v);$

(c) $f(u, v_1 + v_2) = f(u, v_1) + f(u, v_2);$

(d) $f(u, \lambda v) = \lambda f(u, v),$

para todos os vetores $u, u_1, u_2 \in U$, $v, v_1, v_2 \in V$ e para todos os escalares $\lambda \in \mathbb{R}$.

Notação: O conjunto de todas as formas bilineares de $U \times V$ em $\mathbb{R}$ será denotado por $\mathcal{B}(U, V)$ e, quando $U = V$, apenas por $\mathcal{B}(U)$.

Para $f, g \in \mathcal{B}(U, V)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, define-se

• $f + g$ por $(f + g)(u, v) = f(u, v) + g(u, v),$

• λf por $(\lambda f)(u, v) = \lambda f(u, v),$

para todo $(u, v) \in U \times V$.

Proposição 6.1.2. Com as operações definidas acima, o conjunto $\mathcal{B}(U, V)$ tem uma estrutura de espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

A verificação desse resultado é simples e pode ser feita como Exercício.

Exemplo 6.1.3. Sejam $U = V = \mathbb{R}^n$ e $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

Trata-se do produto interno habitual em $\mathbb{R}^n$, para o qual já vimos que valem as propriedades exigidas na definição acima.

Exemplo 6.1.4. Todo produto interno em um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ é uma forma bilinear, o que decorre da própria definição de produto interno.

Exercício 6.1.1. Sejam $u = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ e $v = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$. A função

$$f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(u, v) = x_1 y_1 + 3x_1 y_2 - x_1 y_3 + x_2 y_1 - 3x_2 y_3$$

é uma forma bilinear.

6.2 Matriz de uma forma bilinear

Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ de dimensões m e n , respectivamente. Tomemos uma base $B = \{u_1, \dots, u_m\}$ de U e uma base $C = \{v_1, \dots, v_n\}$ de V . Então, se $u = \sum_{i=1}^m a_i u_i \in U$

e $v = \sum_{j=1}^n b_j v_j \in V$,

$$f(u, v) = f\left(\sum_{i=1}^m a_i u_i, \sum_{j=1}^n b_j v_j\right) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i b_j f(u_i, v_j).$$

A matriz $m \times n$

$$(f(u_i, v_j)) = \begin{pmatrix} f(u_1, v_1) & f(u_1, v_2) & \cdots & f(u_1, v_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(u_m, v_1) & f(u_m, v_2) & \cdots & f(u_m, v_n) \end{pmatrix}$$

é chamada **matriz da forma bilinear f em relação às bases B e C** .

Exemplo 6.2.1. Vamos encontrar a matriz da forma bilinear

$$f(u, v) = x_1 y_1 + 3x_1 y_2 - x_1 y_3 + x_2 y_1 - 3x_2 y_3$$

em relação às bases canônicas.

Temos

$$f((1, 0), (1, 0, 0)) = 1; \quad f((1, 0), (0, 1, 0)) = 3; \quad f((1, 0), (0, 0, 1)) = -1;$$

$$f((0, 1), (1, 0, 0)) = 1; \quad f((0, 1), (0, 1, 0)) = 0; \quad f((0, 1), (0, 0, 1)) = -3.$$

Assim, a matriz é

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Proposição 6.2.2. Fixadas as bases B do espaço vetorial U e C do espaço vetorial V , a correspondência que associa a cada forma bilinear $f \in \mathcal{B}(U, V)$ a sua matriz em relação a essas bases, é um isomorfismo do espaço vetorial $\mathcal{B}(U, V)$ no espaço vetorial $M_{m \times n}(\mathbb{R})$.

Corolário 6.2.3. $\dim \mathcal{B}(U, V) = \dim M_{m \times n}(\mathbb{R}) = m \cdot n$, onde $m = \dim U$ e $n = \dim V$.

A partir de agora, considere $U = V$.

Definição 6.2.4. Uma forma bilinear $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ se diz **não degenerada** quando admite uma representação matricial inversível. Caso contrário, a forma se diz **degenerada**.

Exemplo 6.2.5. O produto interno no $\mathbb{R}^n$, cuja matriz em relação à base canônica é I_n , é um exemplo importante de forma bilinear não degenerada.

6.3 Formas bilineares simétricas e antissimétricas

Definição 6.3.1. Uma forma bilinear $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada **simétrica** se $f(u, v) = f(v, u)$, para todo $(u, v) \in V \times V$.

Proposição 6.3.2. O conjunto das formas bilineares simétricas de $V \times V$ em $\mathbb{R}$, denotado por $\mathcal{B}_S(V)$, é um subespaço vetorial de $\mathcal{B}(V)$.

Demonstração: É fácil ver que se f e g são simétricas, então $f + g$ é simétrica, pois

$$(f + g)(u, v) = f(u, v) + g(u, v) = f(v, u) = g(v, u) = (f + g)(v, u).$$

O mesmo acontece com λf , para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. □

Proposição 6.3.3. Seja V um espaço vetorial de $\mathbb{R}$ de dimensão n . O espaço das formas bilineares simétricas, $\mathcal{B}_S(V)$, é isomorfo ao espaço das matrizes reais simétricas de ordem n . Além disso, $\dim \mathcal{B}_S(V) = \frac{n(n+1)}{2}$.

Demonstração:

A demonstração segue do fato de que toda matriz de uma forma bilinear simétrica é uma matriz simétrica ($A = A^t$) e que a toda matriz simétrica é possível associar uma forma bilinear simétrica.

Além disso, $\frac{n(n+1)}{2}$ é a dimensão do espaço das matrizes reais simétricas. □

Observação 6.3.4. Se f é uma forma bilinear simétrica, então sua representação matricial será simétrica, qualquer que seja a base considerada.

Teorema 6.3.5. Seja $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear simétrica. Então existe uma base de V em relação à qual a matriz de f é diagonal.

A demonstração desse resultado é feita por indução sobre a dimensão de V , mas não será exibida aqui.

Corolário 6.3.6. Para toda matriz simétrica A existe uma matriz inversível P de modo que $P^t A P$ é uma matriz diagonal.

Definição 6.3.7. Uma forma bilinear $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada **antissimétrica** se $f(u, v) = -f(v, u)$, para todo $(u, v) \in V \times V$.

Observação 6.3.8. Decorre da definição que $f(u, u) = 0$, para todo $u \in V$.

Proposição 6.3.9. O conjunto das formas bilineares antissimétricas de $V \times V$ em $\mathbb{R}$, denotado por $\mathcal{B}_A(V)$, é um subespaço vetorial de $\mathcal{B}(V)$.

Proposição 6.3.10. Seja V um espaço vetorial de $\mathbb{R}$ de dimensão n . O espaço das formas bilineares antissimétricas, $\mathcal{B}_A(V)$, é isomorfo ao espaço das matrizes reais antissimétricas de ordem n . Além disso, $\dim \mathcal{B}_A(V) = \frac{n(n-1)}{2}$.

As demonstrações de ambos os resultados anteriores segue de forma análoga ao caso simétrico e é deixado como exercício.

Teorema 6.3.11. *Seja $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear antissimétrica. Então existe uma base de V em relação à qual a matriz de f é*

$$\begin{pmatrix} A & & & & \\ & A & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & A & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

onde $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Corolário 6.3.12. *Se $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ é antissimétrica não degenerada, então a dimensão de V é par.*

Demonstração:

Para que f seja não degenerada, sua matriz deve ser inversível, o que significa que os zeros da diagonal não aparecem. □

Corolário 6.3.13. *Se $\dim V = 2k = n$, então existe uma base de V em relação à qual a matriz de uma forma bilinear antissimétrica não degenerada é do seguinte tipo*

$$\begin{pmatrix} 0 & B \\ -B & 0 \end{pmatrix}$$

onde $B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ é de ordem k .

6.4 Formas quadráticas

Definição 6.4.1. Seja $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear simétrica. Consideremos a função $q_f : V \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $q_f(v) = f(v, v)$, para todo $v \in V$. Esta função de uma variável, que indicaremos apenas por q , quando não houver possibilidade de confusão, chama-se **forma quadrática** sobre V associada à forma bilinear f .

Exemplo 6.4.2. A forma quadrática associada ao produto interno usual do $\mathbb{R}^n$ é

$$q(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_n^2.$$

Exemplo 6.4.3. A função $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(u, v) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1,$$

onde $u = (x_1, x_2, x_3)$ e $v = (y_1, y_2, y_3)$, é uma forma bilinear simétrica. Observe, por exemplo, que a matriz de f em relação à base canônica é

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

que é simétrica. A forma quadrática associada a f é a função

$$q(v) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + x_1x_2 + x_2x_1 = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2.$$

Veremos a seguir que toda forma quadrática admite uma “forma canônica”.

O Teorema 6.3.5 nos assegura que existe uma base de V em relação à qual a matriz de f é diagonal, digamos

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & 0 \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_n \end{pmatrix}.$$

Teremos

$$q(u) = d_1y_1^2 + \cdots + d_ny_n^2 \quad (6.1)$$

onde $u = (y_1, \dots, y_n)$ são as coordenadas de u nessa base. Dizemos que a base com a qual conseguimos esta última igualdade diagonalizou a forma quadrática q . A igualdade (6.1) é uma **expressão diagonal** de q .

Se, ainda, os d_i 's forem 0, 1 ou -1 , dizemos que q foi reduzida a uma soma de quadrados.

Vamos dar a seguir um processo prático para reduzir uma forma quadrática a uma expressão diagonal.

Processo de Gauss

Considere a forma quadrática no $\mathbb{R}^n$,

$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j, \quad \text{com } a_{ij} = a_{ji}.$$

Suponhamos $a_{11} \neq 0$. Façamos a seguinte mudança de coordenadas:

$$\begin{cases} x_1 &= y_1 - \frac{1}{a_{11}}(a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n) \\ x_2 &= y_2 \\ \vdots & \\ x_n &= y_n \end{cases}$$

Então, levando para a expressão de $q(x_1, \dots, x_n)$ estas substituições obteremos

$$q(y_1, \dots, y_n) = a_{11}y_1^2 + q_1(y_2, \dots, y_n)$$

onde $q_1(y_2, \dots, y_n)$ é uma forma quadrática em $n-1$ variáveis.

Se, por acaso, $a_{11} = 0$ mas $a_{12} \neq 0$, fazemos a substituição de variáveis

$$\begin{cases} x_1 &= y_1 + y_2 \\ x_2 &= y_1 - y_2 \\ x_3 &= y_3 \\ \vdots & \\ x_n &= y_n \end{cases}$$

e recaímos numa forma quadrática nas variáveis $y_1, \dots, y_n$ em que o coeficiente de y_1^2 é não nulo. A esta aplicamos então a mudança de coordenadas explicada de início.

Repete-se o procedimento com a forma quadrática q_1 .

A repetição desse raciocínio em número finito de vezes nos levará à redução desejada.

Exemplo 6.4.4. Seja

$$q(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 - 6x_1x_2 = x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_1x_2 - 3x_2x_1$$

uma forma quadrática no $\mathbb{R}^2$.

Sendo $a_{11} \neq 0$, fazemos a substituição

$$\begin{cases} x_1 &= y_1 - (-3y_2) \\ x_2 &= y_2 \end{cases}$$

obtendo

$$\begin{aligned} q(y_1, y_2) &= (y_1 + 3y_2)^2 + 2y_2^2 - 6(y_1 + 3y_2)y_2 \\ &= y_1^2 + 6y_1y_2 + 9y_2^2 + 2y_2^2 - 6y_1y_2 - 18y_2^2 \\ &= y_1^2 - 7y_2^2 \end{aligned}$$

que é uma forma diagonalizável.

Exemplo 6.4.5. Seja

$$\begin{aligned} q(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_1x_3 - 6x_2x_3 + x_3^2 \\ &= x_1^2 + x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_2x_1 + x_2^2 - 3x_2x_3 - 2x_3x_1 - 3x_3x_2 + x_3^2 \end{aligned}$$

uma forma quadrática no $\mathbb{R}^3$.

Efetue as substituições

$$\begin{cases} x_1 &= y_1 - (y_2 - 2y_3) \\ x_2 &= y_2 \\ x_3 &= y_3 \end{cases}$$

obtendo

$$\begin{aligned} q(y_1, y_2, y_3) &= (y_1 - y_2 + 2y_3)^2 + 2(y_1 - y_2 + 2y_3)y_2 + y_2^2 - 4(y_1 - y_2 + 2y_3)y_3 - 6y_2y_3 + y_3^2 \\ &= y_1^2 + y_2^2 + 4y_3^2 - 2y_1y_2 + 4y_1y_3 - 4y_2y_3 + 2y_1y_2 - 2y_2^2 + 4y_2y_3 \\ &\quad + y_2^2 - 4y_1y_3 + 4y_2y_3 - 8y_3^2 - 6y_2y_3 + y_3^2 \\ &= y_1^2 - 3y_2^2 - 2y_2y_3 \end{aligned}$$

Efetue agora a redução de $q_1(y_2, y_3) = -3y_2^2 - 2y_2y_3$. Façamos as substituições

$$\begin{cases} y_3 &= z_3 - \frac{1}{(-3)}(-z_2) \\ y_2 &= z_2 \\ y_1 &= z_1 \end{cases}$$

obtendo

$$\begin{aligned} q(y_2, y_3) &= -3\left(z_3 - \frac{1}{3}z_2\right)^2 - 2z_2\left(z_3 - \frac{1}{3}z_2\right) \\ &= -3z_3^2 + 2z_2z_3 - \frac{1}{3}z_2^2 - 2z_2z_3 + \frac{2}{3}z_2^2 \\ &= \frac{1}{3}z_2^2 - 3z_3^2 \end{aligned}$$

Portanto,

$$q(z_1, z_2, z_3) = z_1^2 + \frac{1}{3}z_2^2 - 3z_3^2.$$

Note: este é um processo trabalhoso, sendo impraticável quando o número de variáveis for grande! Porém, tudo o que foi visto pode ser “mecanizado” em um processo chamado “Processo das matrizes elementares”, que não veremos aqui, mas pode ser encontrado no livro p.239.

6.5 Exercícios

Seções 6.1 e 6.2

Exercício 6.1. Provar que $B(U, V)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Exercício 6.2. Sejam $u = (x_1, x_2)$ e $v = (y_1, y_2)$ vetores genéricos do $\mathbb{R}^2$. Quais das seguintes funções são formas bilineares:

- | | |
|----------------------------------|---|
| (a) $f(u, v) = x_1 y_1$; | (e) $f(u, v) = 1$; |
| (b) $f(u, v) = x_1 y_2$; | (f) $f(u, v) = x_1^2 + x_2 y_1$; |
| (c) $f(u, v) = x_1(y_1 + y_2)$; | (g) $f(u, v) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + 1$; |
| (d) $f(u, v) = 0$; | (h) $f(u, v) = x_1 y_2 - x_2 y_1$. |

Exercício 6.3. * Seja $f(u, v) = x_1 y_1 + 2x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_2 y_2$ uma forma bilinear do $\mathbb{R}^2$, onde $u = (x_1, x_2)$ e $v = (y_1, y_2)$. Calcule a sua matriz em relação às seguintes bases do $\mathbb{R}^2$:

- (a) $\{(1, 1), (1, -1)\}$;
 (b) $\{(2, 1), (1, 2)\}$;
 (c) $\{(2, 3), (4, 1)\}$.

Seção 6.4

Exercício 6.4. Qual a forma bilinear simétrica que dá origem à forma quadrática do $\mathbb{R}^3$:

- (a) $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1 x_2 + 4x_1 x_3 - x_2 x_3$;
 (b) $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + 4x_2 x_3$;
 (c) $q(x_1, x_2, x_3) = 2(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3)$.

Referências Bibliográficas

- [1] C. A. Callioli, H. H. Domingues, and R. C. F. Costa. *Álgebra linear e aplicações*. Atual, 2007.

