

4ª Lista de Exercícios Álgebra Linear
Espaços com produto interno

Seções 4.1 e 4.2

Exercício 1 Considerando o espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$, calcular $\langle u, v \rangle$ nos seguintes casos:

(a) $u = \left(\frac{1}{2}, 2, 1\right)$ e $v = (4, 1, -3)$

(b) $u = (2, 1, 0)$ e $v = (4, 0, 2)$;

(c) $u = (1, 1, 1)$ e $v = (2, -1, 5)$.

Exercício 2 Seja V um espaço euclidiano. Mostre que a aplicação

$$(u, v) \rightarrow u * v = 2\langle u, v \rangle$$

também é um produto interno sobre V . é possível generalizar esse resultado? Como?

Exercício 3 * Sejam $u = (x_1, x_2)$ e $v = (y_1, y_2)$ vetores genéricos do $\mathbb{R}^2$.

(a) Mostre que $\langle u, v \rangle = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2$ define um produto interno sobre $\mathbb{R}^2$.

(b) Determine a norma de $u = (1, 2)$ em relação ao produto interno usual e também em relação ao produto interno definido em (a).

Exercício 4 Sejam u e v vetores de um espaço euclidiano. Mostre as identidades a seguir:

1. $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$ (Identidade do Paralelogramo).

2. $\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 = 4\langle u, v \rangle$.

Exercício 5 Achar o ângulo entre os seguintes vetores do $\mathbb{R}^3$:

(a) $u = (1, 1, 1)$ e $v = \left(\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}\right)$;

(b) $u = (1, -1, 0)$ e $v = (2, -1, 2)$.

Exercício 6 Chama-se **traço** de uma matriz quadrada $A = (a_{ij})$ de ordem n a soma dos termos da sua diagonal principal. Notação: $\text{tr}(A)$.

Seja $V = M_{m \times n}(\mathbb{R})$, mostre que $\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^t A)$ define um produto interno sobre V .

Exercício 7 Para cada um dos itens abaixo, determinar: $\langle u, v \rangle$, $\|u\|$, $\|v\|$ e o ângulo entre u e v .

(a) * $V = \mathbb{R}^2$, com o produto interno usual, $u = (1, 2, 1)$ e $v = (3, 4, 2)$.

(b) $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, com o produto interno $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t)dt$, $u = p(t) = 1 + t + 4t^2$ e $v = q(t) = 2 + 5t^2$.

(c) $V = M_2(\mathbb{R})$, com o produto interno $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^t B)$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Seção 4.3

Exercício 8 Consideremos no espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ o produto interno dado por $\langle u, v \rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2$, para todo par de vetores $u = (x_1, x_2)$, $v = (y_1, y_2)$. Verificar se u e v são ortogonais, em relação a esse produto interno, nos seguintes casos:

(a) $u = (1, 1)$ e $v = (2, -1)$;

(b) $u = (2, 1)$ e $v = (-1, 1)$;

(c) $u = (3, 2)$ e $v = (2, -1)$.

Exercício 9 Determinar m a fim de que os vetores $u = (m + 1, 2)$ e $v = (-1, 4)$ do $\mathbb{R}^2$ sejam ortogonais (considere o produto interno usual).

Exercício 10 Considere em $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ o produto interno definido do seguinte modo

$$\left\langle \sum_{i=0}^2 a_i t^i, \sum_{i=0}^2 b_i t^i \right\rangle = \sum_{i=0}^2 a_i b_i,$$

para todo par de polinômios $f(t) = \sum_{i=0}^2 a_i t^i$ e $g(t) = \sum_{i=0}^2 b_i t^i$ desse espaço. A base canônica $\{1, t, t^2\}$ de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ é ortonormal em relação a esse produto?

Exercício 11 * Ortonormalize a base $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (1, -1, 1)$, $u_3 = (-1, 0, 1)$ do $\mathbb{R}^3$, pelo processo de Gram-Schmidt.

Exercício 12 Achar uma base do subespaço $V^\perp$, onde V é o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado por $(1, 0, 1, 1)$ e $(1, 1, 2, 0)$. Ortonormalize esta base.

Exercício 13 Seja $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y = 0\}$. Determinar uma base ortonormal de W .

Exercício 14 Seja $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0\}$. Determinar uma base ortonormal de W .

Exercício 15 Mostre que $T \in L(\mathbb{R}^2)$ definida por $T(x, y) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y, \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \right)$ é uma isometria.

Exercício 16 Verifique se $T : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ dada por $T(A) = A^t$ é uma isometria.