3ª Lista de Exercícios Álgebra Linear
Transformações Lineares

Seção 3.1

Exercício 1 *Verificar se a aplicação* $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *definida por* $F(x, y, z) = (z, x + y)$ *é linear.*

Exercício 2 *Verificar se a transformação* $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *dada por* $F(x, y, z) = -2x + 3y + 7z$ *é linear.*

Exercício 3 *Quais das seguintes aplicações de* $\mathbb{R}^3$ *em* $\mathbb{R}^3$ *são operadores lineares?*

(a) $F_1(x, y, z) = (x - y, x + y, 0)$.

(b) $F_2(x, y, z) = (2x - y + z, 0, 0)$.

(c) $F_3(x, y, z) = (x, x, x)$.

(d) $F_4(x, y, z) = (2x^2 + 3y, x, z)$.

Exercício 4 *Seja* $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *o operador linear definido na base canônica da seguinte forma:*

$$F(1, 0, 0) = (2, 3, 1),\ F(0, 1, 0) = (5, 2, 7),\ F(0, 0, 1) = (-2, 0, 7).$$

Determine $F(x, y, z)$*, onde* (x, y, z) *é um vetor genérico de* $\mathbb{R}^3$*. Mostre que* F *é, de fato, um operador linear.*

Exercício 5 *Determinar uma aplicação linear* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *tal que*

$$T(1, 0, 0) = (1, 2),\ T(0, 1, 0) = (3, 4),\ T(0, 0, 1) = (0, 0).$$

Seções 3.2 e 3.3

Exercício 6 *Determinar o núcleo das transformações lineares abaixo e descreva-os geometricamente:*

(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $T(x, y) = y + 2x$.

(b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $T(x, y, z) = z - 2x$.

(c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (2x + 2y, x + y)$.

(d) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x + y, x - y)$.

(e) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (z - x, z - 2x, z - 3x)$.

Exercício 7 *Seja* $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *a transformação linear dada por* $F(x, y, z) = (x + y, 2x - y + z)$.

(a) *Dar uma base e a dimensão de* $\ker(F)$.

(b) *Dar uma base e a dimensão de* $\mathrm{Im}(F)$.

Exercício 8 *Determinar bases para o núcleo e para a imagem das transformações lineares abaixo:*

(a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x + y, 2x + y, 3x + y)$.

(b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $T(x, y) = y + 2x$.

(c) *$T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$, $T(X) = AX$, onde* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

(d) *$T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$, $T(X) = AX + X$, onde* $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercício 9 *Determinar um operador linear em $\mathbb{R}^4$ cujo núcleo é gerado pelos vetores* $(1, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$.

Exercício 10 *Determinar um operador linear em $\mathbb{R}^3$ cujo núcleo é gerado pelos vetores* $(1, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ *e a imagem é gerada pelo vetor* $(1, -1, 1)$.

Exercício 11 ** Considere o operador linear em $\mathbb{R}^3$ tal que*

$$T(1, 0, 0) = (1, 1, 1),\ T(0, 0, 1) = (1, 0, 1),\ T(0, 1, 2) = (0, 0, 4).$$

T é um isomorfismo? Se sim, obtenha o isomorfismo inverso.

Exercício 12 *A aplicação linear $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por*

$$F(1, 0, 0) = (1, 1, 0),\ F(0, 1, 0) = (0, 0, 1),\ F(0, 0, 1) = (1, -1, 6)$$

é um isomorfismo?

Seção 3.4

Exercício 13 *Sejam $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ as transformações lineares definidas por $F(x, y, z) = (x + y, z)$ e $G(x, y, z) = (x, y - z)$. Determine as seguintes transformações lineares de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^2$:*

(a) $F + G$;

(b) $2F - 3G$.

Exercício 14 *Sejam $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ as transformações lineares definidas por $F(x, y) = x + 2y$ e $G(x) = 2x$. Determine a transformação $G \circ F$.*

Exercício 15 ** Considere $F, G \in L(\mathbb{R}^2)$ definidos por $F(x, y) = (x - y, x)$ e $G(x, y) = (x, 0)$. Determinar:*

(a) $2F + 3G$;

(b) $F \circ G$;

(c) $G \circ F$;

(d) F^2;

(e) G^2.

Exercício 16 *Seja $F \in L(\mathbb{R}^3)$ definida por $F(x, y, z) = (3x, x - y, 2x + y + z)$. Mostre que*

$$(F^2 - I) \circ (F - 3I) = 0 \text{ (operador nulo).}$$

Exercício 17 *Mostre que os operadores $F, G, H \in L(\mathbb{R}^2)$ dados por $F(x, y) = (x, 2y)$, $G(x, y) = (y, x + y)$ e $H(x, y) = (0, x)$ formam um conjunto L.I. em $L(\mathbb{R}^2)$.*

Exercício 18 *Determinar se os seguinte operadores lineares do* $\mathbb{R}^3$ *são idempotentes ou nilpotentes ou nenhuma das duas coisas:*

(a) $F(x, y, z) = (-x, -y, -z)$;

(b) $F(x, y, z) = (z, x, y)$;

(c) $F(x, y, z) = (x, 0, z)$;

(d) $F(x, y, z) = (0, 0, x)$.

Exercício 19 *Sejam* $F, G \in (\mathbb{R}^3)^*$ *definidas por* $F(x, y, z) = x - 3y + 2z$ *e* $G(x, y, z) = 2x - y + z$. *Determine* $F + G$, $2F + 3G$ *e os seus respectivos núcleos.*

Exercício 20 *Determinar as bases duais de cada uma das seguintes bases:*

(a) $\{(1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 2)\}$ *do* $\mathbb{R}^3$;

(b) $\{(1, 2), (0, 1)\}$ *do* $\mathbb{R}^2$;

(c) $\{(0, 1, 0, 0), (2, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 3)\}$ *do* $\mathbb{R}^4$;

(d) $\{1, t, 1 - t^2\}$ *de* $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

Seção 3.5

Exercício 21 *Seja* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *a transformação linear dada por*

$$T(x, y, z) = (x + z, y + z, x + y + 2z).$$

Encontre as matrizes de T *com relação à base canônica,* C, *e com relação à base* $B = \{(1, 1, 2), (-1, 1, 0), (-1, -1, 1)\}$.

Exercício 22 *Seja* $F \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ *definida por* $F(x, y, z) = (z, x + y)$. *Determinar a matriz de* F *em relação às bases* $B = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ *de* $\mathbb{R}^3$ *e* $C =$ *base canônica do* $\mathbb{R}^2$.

Exercício 23 ** Determinar as matrizes das seguintes transformações lineares em relação às bases canônicas dos respectivos espaços vetoriais:*

(a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (x + y, z)$.

(b) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $T(x, y, z, t) = 2x + y - z + 3t$.

(c) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $T(x) = (x, 2x, 3x)$.

Exercício 24 *Seja* $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ *operador linear dado por* $(T(p))(t) = p(t) - p(1)$, $p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. *Se* $B = \{1, t - 1, (t - 1)^2\}$ *e* $C = \{1, t, t^2\}$, *encontre* $[T]_{B,C}$, $[T]_B$ *e* $[T]_C$.

Exercício 25 *Determinar o operador* F *do* $\mathbb{R}^2$ *cuja matriz em relação à base* $B = \{(1, 1), (1, 2)\}$ *é* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Exercício 26 *Seja* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *operador linear cuja matriz em relação à base* $B = \{(1, 0), (1, 4)\}$ *é* $[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$. *Determinar a matriz de* T *em relação à base canônica de* $\mathbb{R}^2$.

Exercício 27 ** Verificar matricialmente de o operador linear* $F \in L(\mathbb{R}^3)$ *dado por* $F(x, y, z) = (x - y, 2y, y + z)$ *é inversível. Se for, ache* F^{-1} *também por meio de matrizes.*

Exercício 28 *Considere os operadores lineares* F *e* G *do* $\mathbb{R}^2$ *dados por* $F(x, y) = (x, x - y)$ *e* $G(x, y) = (x + y, 2x)$. *Determinar as matrizes de* $F + G$, $3F$, $F \circ G$ *e* F^2 *em relação à base canônica.*