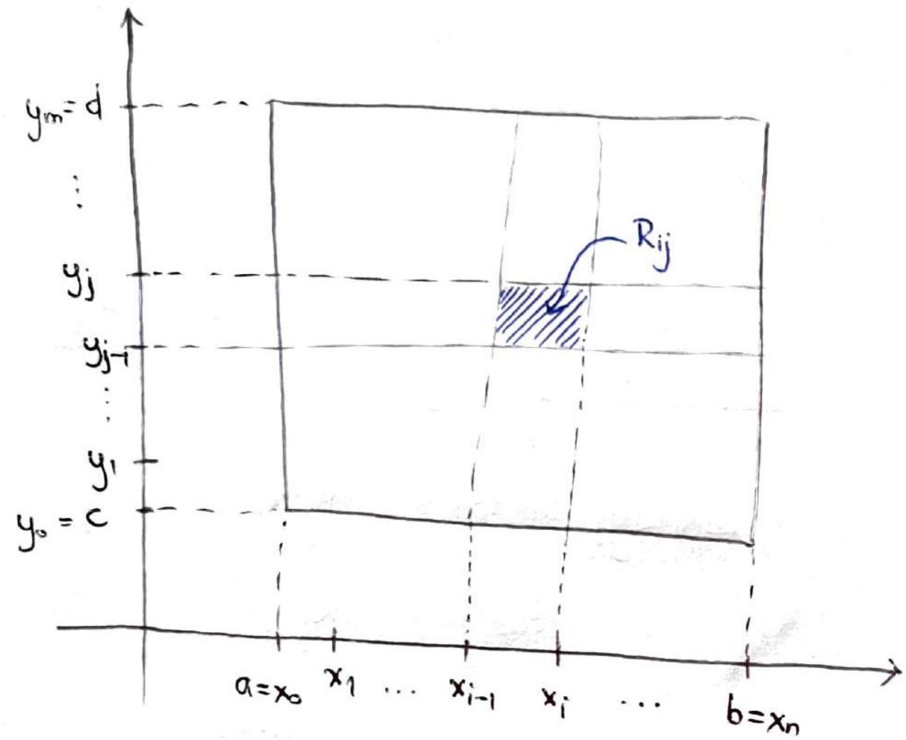
Integrais Duplas e Triplas

1. Integrais Duplas

1.1. Soma de Riemann



Seja $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ um retângulo onde a, b, c, d são números reais dados, com $a < b$ e $c < d$. Seja $P_1 : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ e $P_2 : c = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_m = d$ partições de $[a, b]$ e $[c, d]$, respectivamente. O conjunto

$$P = \{(x_i, y_j) \mid i = 0, 1, \ldots, n, \ j = 0, 1, \ldots m\}$$

denomina-se partição do retângulo R. Uma partição P de R determina $m \cdot n$ retângulos $R_{ij} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i, \ y_{j-1} \leq y \leq y_j\}$.

Seja $B \subseteq \mathbb{R}^2$, dizemos que B é limitado se existir um retângulo R, com $B \subseteq R$.

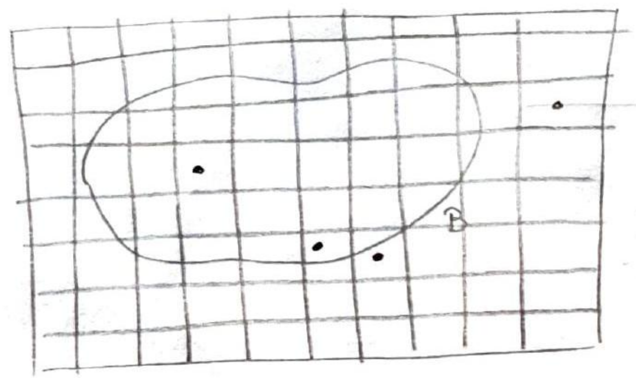
Seja $f : B \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, com B limitado. Assim, existe um retângulo

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \ c \leq y \leq d\}$$

tal que $B \subseteq R$. Seja $P = \{(x_i, y_j) \mid i = 0, 1, \ldots, n, zj = 0, 1, \ldots, m\}$ uma partição de R. Para cada par de índices (i, j), seja $X_{ij} = (u_{ij}, v_{ij})$ um ponto escolhido arbitrariamente no retângulo R_{ij}. Pois bem, o número

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f\left(X_{ij}\right)\Delta x_i \Delta y_j \tag{1}$$

onde $f\left(X_{ij}\right)=0$ se $X_{ij}\notin B$, denomina-se soma de Riemann de f, relativa à partição P e aos pontos X_{ij}.



Observe que se $f\left(X_{ij}\right)>0$, $f\left(X_{ij}\right)\Delta x_i \Delta y_j$ será o volume do paralelepípedo de altura $f\left(X_{ij}\right)$ e cuja base é o retângulo R_{ij}.

Seja $P=\{(x_i,y_j)\mid i=0,1,\ldots,n,\ j=0,1,\ldots,m\}$ uma partição do retângulo R. No que segue,

$$\Delta=\max\left\{\Delta x_1,\Delta x_2,\ldots,\Delta x_n,\Delta y_1,\ldots,\Delta y_m\right\}.$$

Observe que se $\Delta\to 0$ então $\Delta x_i\to 0$ e $\Delta y_j\to 0$.

1.2. Definição de Integral Dupla

Seja $f: B\subseteq\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função, com B limitado, e $L\in\mathbb{R}$. Dizemos que a soma de Riemann tende a L, quando Δ tende a zero, e escrevemos

$$\lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f\left(X_{ij}\right)\Delta x_i \Delta y_j = L$$

se para todo $\varepsilon>0$ dado, existir $\delta>0$, que só dependa de ε mas não da escolha de X_{ij}, tal que

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f\left(X_{ij}\right)\Delta x_i \Delta y_j - L\right|<\varepsilon$$

para toda partição P, com $\Delta<\delta$.

Tal número L, quando existe, é único e é chamado de integral dupla (segundo Riemann) de f sobre B, que denotamos por $\displaystyle\iint_B f(x,y)\,dxdy$.

Se $\displaystyle\iint_B f(x,y)dxdy$ existe, então diremos que f é integrável (segundo Riemann) em B.

Definimos também:

• Área de B: $A_B = \displaystyle\iint_B dxdy$, desde que a integral exista.

• Seja $f(x,y)$ integrável em B, com $f(x,y) \geqslant 0$ em B. Seja o conjunto

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in B, 0 \leq z \leq f(x,y)\right\}.$$

Temos

$$\text{Volume de } A = \iint_B f(x,y)dxdy.$$

Exemplo: A função $f(x,y) = k$, k constante, é integrável no retângulo $B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d\right\}$ e $\displaystyle\iint_B kdxdy = k(b-a)(d-c)$.

Solução:

Para toda partição P de B, temos

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f\left(x_{ij}\right)\Delta x_i \Delta y_j &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} k\Delta x_i \Delta y_j = k\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \Delta x_i \Delta y_j \\ &= k \cdot (\text{área de } B) = k(b-a)(d-c)\end{aligned}$$

Segue que

$$\iint_B kdxdy = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} k\Delta x_i \Delta y_j = k(b-a)(d-c)$$

Se $k > 0$, $\iint_B kdxdy$ é o volume do paralelepípedo $a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d$ e $0 \leq z \leq k$.

NOTE QUE: Só conseguimos isolar k na segunda igualdade pois é constante. Sendo assim, nem sempre é fácil ou possível calcular uma integral dupla direto pela definição.

No que segue, veremos uma condição suficiente para a integrabilidade e, mais adiante, alguns resultados que facilitarão o cálculo da integral dupla.

1.3. Uma condição suficiente para integrabilidade

Definição: Seja $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Dizemos que D tem conteúdo nulo se, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existir um número finito de retângulos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tais que $D \subset A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ e $\sum_{i=1}^{n}$ área$(A_i) < \varepsilon$, onde área(A_i) é a área do retângulo A_i.

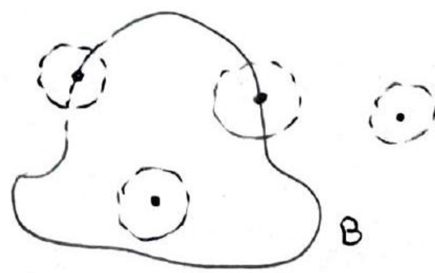
A grosso modo, dizer que D tem conteúdo nulo significa que D pode ser coberto por um número finito de retângulos cuja soma das áreas seja tão pequena quanto se queira.

Exemplos:

1) Todo subconjunto do $\mathbb{R}^2$ com um número finito de pontos tem conteúdo nulo.

2) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua em $[a, b]$. O gráfico de f tem conteúdo nulo.

Definição: Seja $B \subset \mathbb{R}^2$ e seja $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ que pode pertencer ou não a B. Dizemos que (x_0, y_0) é um ponto de fronteira de B se toda bola aberta de centro (x_0, y_0) contiver pelo menos um ponto de B e pelo menos um ponto não pertencente a B. O conjunto de todos os pontos de fronteira de B denomina-se fronteira de B.



Exemplos:

3) Seja $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$. A fronteira de B é o conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

4) Seja $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 < y \leq x^2 + 1, \quad 0 \leq x < 1\}$.

A fronteira de B é o conjunto

$$G_g \cup G_h \cup \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1\} \cup \{(1, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq y \leq 2\}$$

onde G_g e G_h são, respectivamente, os gráficos das funções $g(x) = x^2$ e $h(x) = x^2 + 1$, com $0 \leq x \leq 1$.

Note que a fronteira de B tem conteúdo nulo (gráficos de funções e curvas C^1).

Teorema: Seja $B \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto limitado e seja f uma função contínua e limitada em B. Nestas condições, se a fronteira de B tiver conteúdo nulo, então f será integrável em B.

Observações:]

1. Se a fronteira de B for igual a $M \cup N$, onde M é a reunião de um número finito de gráficos de funções contínuas definidas em intervalos fechados e N a reunião de um número finito de imagens de curvas de classe C^1 definidas em intervalos fechados, então a fronteira de B terá conteúdo nulo.

2. No Teorema, a hipótese "f é contínua" pode ser substituída por "f é contínua em todos os pontos de B, exceto nos pontos de um conjunto de conteúdo nulo".

Exemplos:

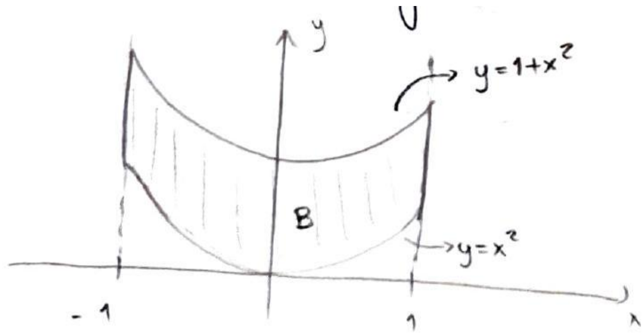
5) Sejam $f(x, y) = x + y$ e $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq y \leq 1 + x^2, 1 \leq x \leq 1\}$. A função f é integrável em B?

Solução:

Note que $-1 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 1$. Assim,

$$0 \leq x^2 \leq y \leq 1 + x^2 \leq 2$$

Logo, $-1 \leq f(x,y) \leq 3$, $\forall (x,y) \in B$. Assim, f é limitada em B. Observe também que f é contínua em B.



A fronteira de B tem conteúdo nulo, pois é a reunião dos conjuntos D_1, D_2, D_3 e D_4, onde D_1 é o gráfico de $y = x^2$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$; D_2 o gráfico de $y = 1 + x^2$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$; D_3 é a imagem da curva $x = 1, y = t$, $1 \leqslant t \leqslant 2$; D_4 a imagem da curva $x = -1, y = t$, $1 \leqslant t \leqslant 2$.

Portanto, f é integrável em B.

6) Seja B o quadrado $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$. Seja $f : B \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2+y^2} & , \text{ se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & , \text{ se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

f é integrável em B? Por quê?

Solução:

- A fronteira de B tem conteúdo nulo (justifique!).
- f é limitada em B, pois $0 \leqslant f(x,y) \leqslant 1, \forall (x,y) \in B$.
- f só é descontínua em $(0,0)$; logo, o conjunto dos pontos de descontinuidade tem conteúdo nulo.

Portanto, f é integrável em B.

1.4. Propriedades da Integral

Sejam f e g integráveis em B e k uma constante.

I) $f + g$ e kf são integráveis e

a) $\iint_B [f(x,y) + g(x,y)]dxdy = \iint_B f(x,y)dxdy + \iint_B g(x,y)dxdy$

b) $\iint_B kf(x,y)dxdy = k \iint_B f(x,y)dxdy.$

II) $f(x,y) \geqslant 0$ em $B \Rightarrow \iint_B f(x,y)dxdy \geqslant 0.$

III) $f(x,y) \leqslant g(x,y)$ em $B \Rightarrow \iint_B f(x,y)dxdy \leqslant \iint_B g(x,y)dxdy.$

IV) Se B tiver conteúdo nulo, então $\iint_B f(x,y)dxdy = 0$.

V) Se o conjunto $\{(x,y) \in B \mid f(x,y) \neq g(x,y)\}$ tiver conteúdo nulo, então

$$\iint_B f(x,y)dxdy = \iint_B g(x,y)dxdy$$

VI) Se f for integrável em B_1 e B_2, com $B_1 \cap B_2$ tendo conteúdo nulo, então

$$\iint_{B_1 \cup B_2} f(x,y)dxdy = \iint_{B_1} f(x,y)dxdy + \iint_{B_2} f(x,y)dxdy$$

VII) Se $m \leq f(x,y) \leq M$ para todo $(x,y) \in B$ e $A(B)$ denota a área da região B, então

$$m \cdot A(B) \ \leqslant \ \iint_B f(x,y)dxdy \ \leqslant \ M \cdot A(B).$$

Exemplo: Estime $\iint_B e^{\operatorname{sen} x \cos y} dxdy$, onde B é o disco com centro na origem e raio 2.

Solução:

Como $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$ e $-1 \leq \cos y \leq 1$, temos $-1 \leq \operatorname{sen} x \cos y \leq 1$ e, portanto,

$$e^{-1} \leq e^{\operatorname{sen} x \cos y} \leq e^1 = e$$

Assim, usando $m = e^{-1} = 1/e, M = e$ e $A(B) = \pi(2^2) = 4\pi$, temos

$$\frac{4\pi}{e} \leqslant \iint_B e^{\operatorname{sen} x \cos y} dxdy \leqslant 4\pi e$$

Definição: Seja $B \subseteq \mathbb{R}^2$. Dizemos que B é um conjunto fechado se o seu complementar é aberto.

Um resultado interessante é:

$$B \text{ é fechado} \Leftrightarrow B \text{ contém todos os seus pontos de fronteira.}$$

Definição: Seja $B \subseteq \mathbb{R}^2$. Dizemos que B é um conjunto compacto se B for fechado e limitado.

VIII) Propriedade do valor médio para integrais

Suponhamos que f é contínua em $B \subseteq \mathbb{R}^2$, onde B é um conjunto compacto com fronteira de conteúdo nulo. Suponhamos, ainda, que dois pontos quaisquer de B podem ser ligados por uma curva contínua, com imagem contida em B. Nestas condições, existe pelo menos um ponto $(r,s) \in B$ tal que

$$\iint_B f(x,y)dxdy = A \cdot f(r,s),$$

onde A é a área de B.

Se $f(x,y) \geqslant 0$, $\displaystyle\iint_B f(x,y)dxdy$ é o volume da região de base B e altura média $f(r,s)$.

A partir da propriedade (V), vejamos como definir a integral de uma função f sobre um conjunto B quando f estiver definida em todos os pontos de B, exceto nos pontos de um conjunto de conteúdo nulo.

Seja B um conjunto compacto com fronteira de conteúdo nulo. Seja $f(x,y)$ uma função definida em todos os pontos de B, exceto nos pontos de um conjunto D de conteúdo nulo, com $D \subseteq B$. Seja $g : B \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = g(x,y)$, para todo $(x,y) \notin D$. Definimos

$$\iint_B f(x,y)dxdy = \iint_B g(x,y)dxdy,$$

desde que a integral do segundo membro exista.

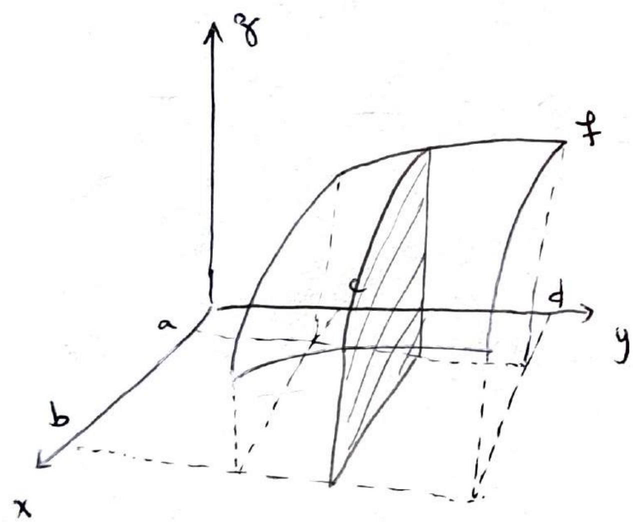
2. Cálculo de Integral Dupla

Considere o retângulo $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \text{ e } c \leq y \leq d\}$ e seja $f(x,y)$ integrável em R. Para cada y fixo em $[c,d]$, podemos considerar a função na variável x, definida em $[a,b]$ e dada por

$$x \longmapsto f(x,y). \tag{I}$$

Se, para cada $y \in [c,d]$, (I) for integrável em $[a,b]$, podemos então considerar a função dada por

$$\alpha(y) = \int_a^b f(x,y)dx, \quad y \in [c,d]$$



Teorema de Fubini: Seja $f(x,y)$ integrável no retângulo $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \text{ e } c \leq y \leq d\}$. Suponhamos que $\int_a^b f(x,y)dx$ exista para todo $y \in [c,d]$ e que v $\int_c^d f(x,y)dy$ exista para todo $x \in [a,b]$. Então

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right] dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right] dx$$

Nota: As hipóteses do Teorema de Fubini são satisfeitas se f for contínua em R ou se f for limitada em R e o conjunto de suas descontinuidades tiver medida nula.

Exemplos:

1) Calcule $\iint_R x^2 y dxdy$, onde R é o retângulo $0 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 2$.

Solução:

Temos:

$$\begin{aligned}
\iint_R x^2 y dxdy &= \int_1^2 \int_0^3 x^2 y dxdy = \int_1^2 \left[\int_0^3 x^2 y dx\right] dy \\
&= \int_1^2 \left[\frac{x^3}{3} y \Big|_{x=0}^{x=3}\right] dy = \int_1^2 [9y]\, dy = \int_1^2 9y dy \\
&= 9 \frac{y^2}{2}\Big|_1^2 = 9\left(2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{27}{2}
\end{aligned}$$

Note que usando a outra ordem de integração o resultado seria o mesmo:

$$\begin{aligned}
\iint_R x^2 y dxdy &= \int_0^3 \int_1^2 x^2 y dydx = \int_0^3 \left[\int_1^2 x^2 y dy\right] dx \\
&= \int_0^3 \left[x^2 \frac{y^2}{2}\Big|_{y=1}^{y=2}\right] dx = \int_0^3 \left[2x^2 - \frac{x^2}{2}\right] dx = \int_0^3 \frac{3x^2}{2} dx \\
&= \frac{x^3}{2}\Big|_0^3 = \frac{27}{2}
\end{aligned}$$

2) Calcule o volume do conjunto de todos (x,y,z) tais que $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ e $0 \leq z \leq x^2 + y^2$.

Solução:

O volume é dado por

$$V = \iint_B (x^2 + y^2)dxdy,$$

onde B é o retângulo $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.

Assim,

$$\begin{aligned} V &= \iint_B (x^2+y^2)dxdy = \int_0^1 \int_0^1 (x^2+y^2)dxdy = \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} + xy^2 \Big|_{x=0}^{x=1} \right] dy \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{3} + y^2 \right] dy = \left[\frac{1}{3}y + \frac{y^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

3) Determine o volume do sólido S que é limitado pelo paraboloide elíptico $x^2+2y^2+z=16$, pelos planos $x=2$ e $y=2$ e pelos três planos coordenados.

Solução:

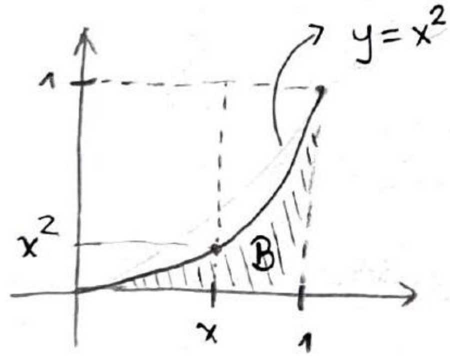
Observe que S é o sólido que está abaixo da superfície $z=16-x^2-2y^2$ e acima do quadrado $R=[0,2]\times[0,2]$. Logo,

$$\begin{aligned} V &= \iint_R (16-x^2-2y^2)dxdy = \int_0^2 \int_0^2 (16-x^2-2y^2)dxdy \\ &= \int_0^2 \left[16x - \frac{x^3}{3} - 2xy^2 \right]_{x=0}^{x=2} dy = \int_0^2 \left(\frac{88}{3} - 4y^2 \right) dy \\ &= \left[\frac{88}{3}y - \frac{4y^3}{3} \right]_0^2 = 48. \end{aligned}$$

E se a base não for um retângulo? Vejamos com um exemplo:

4) Calcule $\iint_B xydxdy$, onde B é o conjunto de todos os (x,y) tais que $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x^2$.

Solução:



Seja R o retângulo $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$.

Seja $F(x,y)$ definida em R e dada por

$$F(x,y) = \begin{cases} xy, & \text{se } (x,y) \in B \\ 0, & \text{se } (x,y) \notin B \end{cases}$$

Assim,

$$\iint_B xydxdy = \iint_R F(x,y)dxdy$$

Pelo Teorema de Fubini,

$$\iint_R F(x,y)dxdy = \int_0^1 \int_0^1 F(x,y)dydx$$

Para cada x fixo em $[0,1]$,

$$\beta(x) = \int_0^1 F(x,y)dy = \int_0^{x^2} F(x,y)dy + \int_{x^2}^1 F(x,y)dy$$

Como $F(x,y) = 0$ para $y > x^2$, resulta

$$\beta(x) = \int_0^{x^2} F(x,y)dy = \int_0^{x^2} xydy$$

Logo,

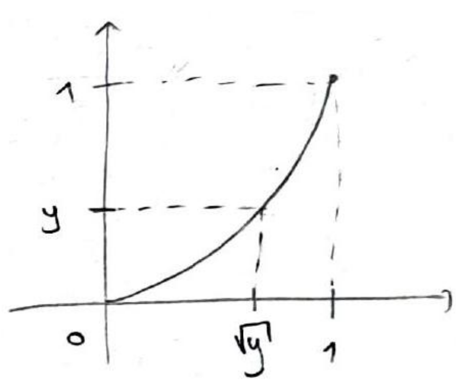
$$\begin{aligned}\iint_B xydxdy &= \int_0^1 \left[\int_0^{x^2} xydy\right] dx = \int_0^1 \left[x\frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=x^2}\right] dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{x^5}{2}\right] dx = \frac{x^6}{12}\Big|_0^1 = \frac{1}{12}\end{aligned}$$

Vamos calcular $\iint_B xydxdy$, invertendo a ordem de integração. Temos:

$$\iint_R F(x,y)dxdy = \int_0^1 \int_0^1 F(x,y)dxdy$$

Para cada y fixo em $[0,1]$,

$$\alpha(y) = \int_0^1 F(x,y)dx = \int_0^{\sqrt{y}} F(x,y)dx + \int_{\sqrt{y}}^1 F(x,y)dx$$



Como $F(x,y) = 0$ para $x < \sqrt{y}$, resulta

$$\alpha(y) = \int_{\sqrt{y}}^{1} F(x,y)dx = \int_{\sqrt{y}}^{1} xydx$$

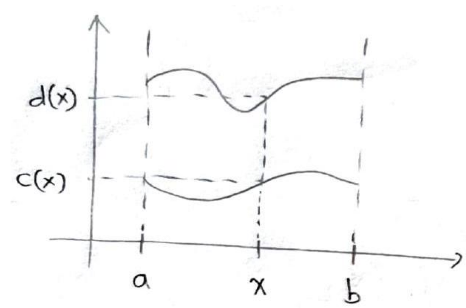
Logo,

$$\iint_B xydxdy = \int_0^1 \left[\int_{\sqrt{y}}^{1} xydx\right] dy = \int_0^1 \left[\left.\frac{x^2y}{2}\right|_{x=\sqrt{y}}^{x=1}\right] dy$$
$$= \int_0^1 \left[\frac{y}{2} - \frac{y^2}{2}\right] dy = \left[\frac{y^2}{4} - \frac{y^3}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

Com raciocínio análogo ao do exemplo anterior, provam-se as seguintes consequências do Teorema de Fubini.

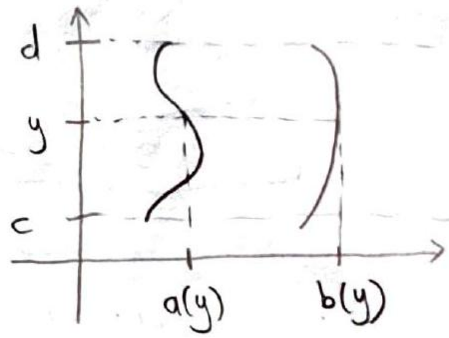
Corolário 1: Sejam $c(x)$ e $d(x)$ duas funções contínuas em $[a,b]$ e tais que, para todo $x \in [a,b], c(x) \leq d(x)$. Seja $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x)\}$. Nestas condições, se $f(x,y)$ for contínua em B, então

$$\iint_B f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)dy\right] dx$$



Corolário 2: Sejam $a(y)$ e $b(y)$ duas funções contínuas em $[c,d]$ e tais que, para todo $y \in [c,d], a(y) \leq b(y)$. Seja $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d, a(y) \leq x \leq b(y)\}$. Nestas condições, se $f(x,y)$ for contínua em B, então

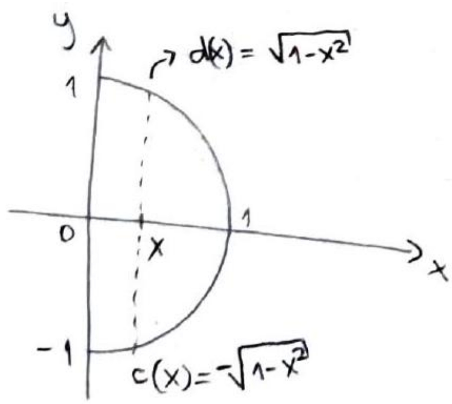
$$\iint_B f(x,y)dxdy = \int_c^d \left[\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)dx\right] dy$$



Exemplos:

5) Calcule $\displaystyle\iint_B (x-y)dxdy$, onde B é o semicírculo $x^2+y^2 \leqslant 1, x \geqslant 0$.

Solução:



Para cada $x \in [0,1]$, o y varia entre $c(x) = -\sqrt{1-x^2}$ e $d(x) = \sqrt{1-x^2}$. Assim,

$$\begin{aligned}\iint_B (x-y)dxdy &= \int_0^1 \left[\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (x-y)dy\right] dx \\ &= \int_0^1 \left[xy - \frac{y^2}{2}\right]_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^1 2x\sqrt{1-x^2}dx\end{aligned}$$

Fazendo a mudança:

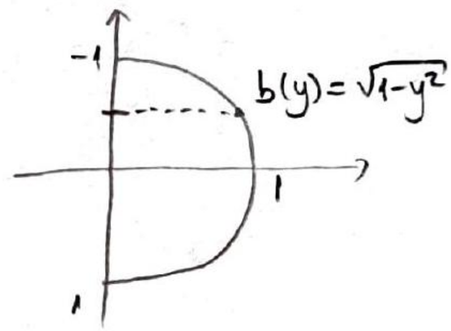
$$\begin{cases} u = 1-x^2;\ du = -2xdx \\ x = 0 \Rightarrow u = 1 \\ x = 1 \Rightarrow u = 0 \end{cases}$$

temos

$$\int_0^1 2x\sqrt{1-x^2}dx = \int_0^1 \sqrt{u}du = \frac{2}{3}.$$

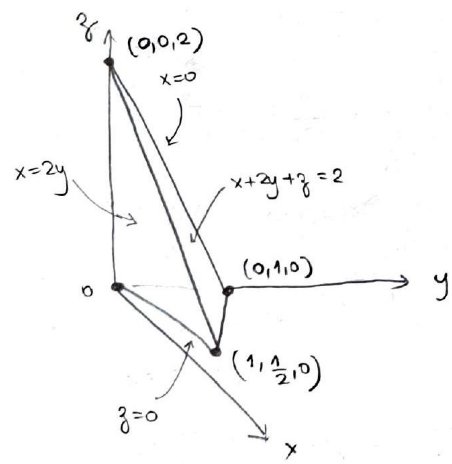
Portanto
$$\iint_B (x-y)dxdy = \frac{2}{3}.$$

É possível fazer a mesma conta invertendo a ordem de integração. Observando que para cada $y \in [-1,1]$, o x varia entre $a(y) = 0$ e $b(y) = \sqrt{1-y^2}$.

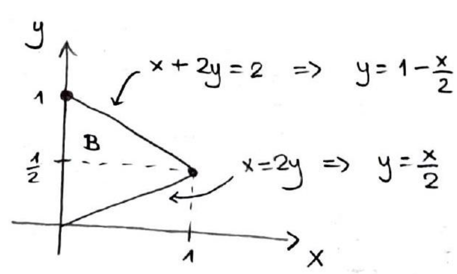


6) Determine o volume do tetraedro limitado pelos planos $x + 2y + z = 2$, $x = 2y$, $x = 0$, $z = 0$.

Solução:



Base:



$x \in [0,1]$, $\frac{x}{2} \leqslant y \leqslant 1 - \frac{x}{2}$

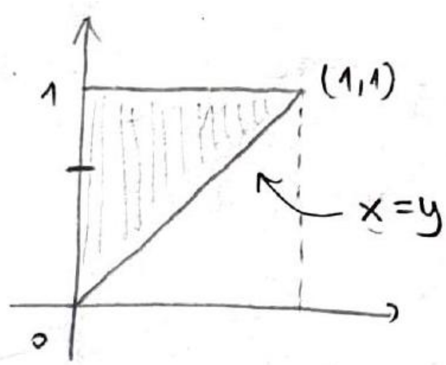
Logo,

$$
\begin{aligned}
V &= \iint_B (2-x-2y)dxdy = \int_0^1 \left[\int_{\frac{x}{2}}^{1-\frac{x}{2}} (2-x-2y)dy\right] dx \\
&= \int_0^1 \left[2y - xy - y^2\right]_{y=\frac{x}{2}}^{y=1-\frac{x}{2}} dx \\
&= \int_0^1 \left((2\left(1-\frac{x}{2}\right) - x\left(1-\frac{x}{2}\right) - \left(1-\frac{x}{2}\right)^2) - (2\left(\frac{x}{2}\right) - x\left(\frac{x}{2}\right) - \left(\frac{x}{2}\right)^2)\right) dx \\
&= \int_0^1 \left(x^2 - 2x + 1\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right]_0^1 = \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

Algumas vezes, escolher entre uma ordem de integração ou outra pode fazer toda a diferença nas contas (deixando-as mais fáceis ou mais difíceis). Por isso, saber mudar a ordem de integração é muito importante.

7) Calcule $\iint_B e^{-y^2} dxdy$, onde B é o triângulo de vértices $(0,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$.

Solução:



$$y \in [0,1] \Rightarrow 0 \le x \le y; \quad x \in [0,1] \Rightarrow x \le y \le 1$$

$$\iint_B e^{-y^2} dxdy = \int_0^1 \left[\int_0^y e^{-y^2} dx\right] dy \quad \text{(fácil de calcular)}$$

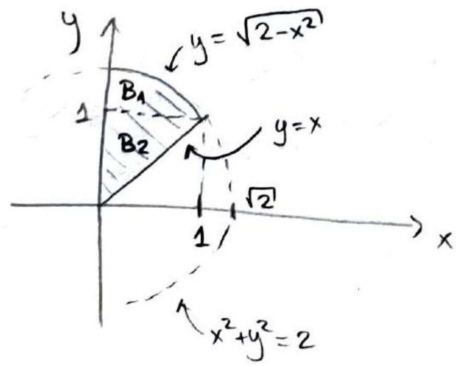
ou

$$\int_0^1 \left[\int_x^1 e^{-y^2} dy\right] dx \quad \text{(problema!)}$$

8) Inverta a ordem de integração na integral $\int_0^1 \left[\int_x^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy\right] dx$, onde $f(x,y)$ é suposta contínua em $\mathbb{R}^2$.

Solução:

Região: $x \in [0,1]$ e $x \leqslant y \leqslant \sqrt{2-x^2}$
$y = \sqrt{2-x^2} \Rightarrow y^2 = 2 - x^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2$



Assim, $B = B_1 \cup B_2$. Logo,

$$\int_0^1 \left[\int_x^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy\right] dx = \iint_{B_1} f(x,y)dxdy + \iint_{B_2} f(x,y)dxdy = (*)$$

onde B_1 é o triângulo de vértices $(0,0),(1,1)$ e $(0,1)$ e B_2 o conjunto dos (x,y) tais que $0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq \sqrt{2-x^2}$.

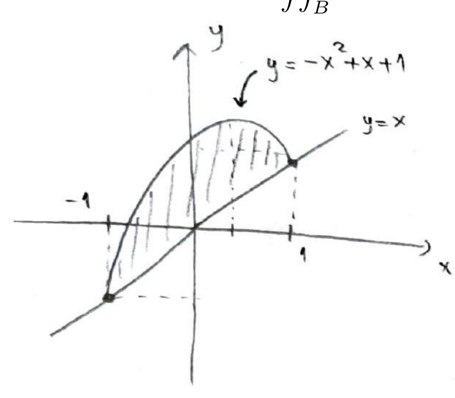
Daí,

$$(*) = \int_0^1 \left[\int_0^y f(x,y)dx\right] dy + \int_1^{\sqrt{2}} \left[\int_0^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx\right] dy$$

9) Utilizando integral dupla, calcule a área da região compreendida entre os gráficos das funções $y = x$ e $y = -x^2 + x + 1$, com $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Solução:

Seja B a região dada. Temos: área de $B = \displaystyle\iint_B dxdy$.



Daí,

$$\begin{aligned}
\iint_B dxdy &= \int_{-1}^{1}\left[\int_{x}^{-x^2+x+1} dy\right] dx \\
&= \int_{-1}^{1} [y]_{y=x}^{y=-x^2+x+1} dx \\
&= \int_{-1}^{1} \left(-x^2+1\right) dx = \left[-\frac{x^3}{3}+x\right]_{-1}^{1} \\
&= \left(-\frac{1}{3}+1\right) - \left(\frac{1}{3}-1\right) = \frac{2}{3}+\frac{2}{3} = \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

3. Aplicações

3.1. Área de Superfície

Seja S uma superfície com a equação $z = f(x, y)$, onde f tem derivadas parciais contínuas. A área de S, denotada por $A(S)$, é dada por:

$$A(S) = \iint_B \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dA$$

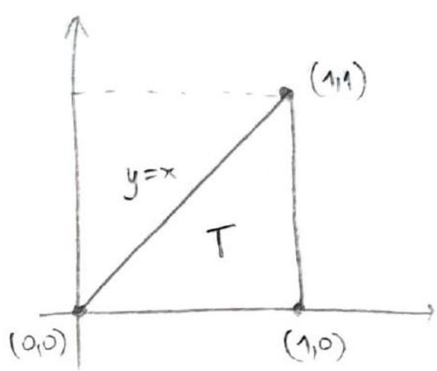
onde B é o domínio de f.

Observe a semelhança entre a fórmula da área de superfície e a fórmula do comprimento de arco de uma curva $y = f(x)$:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

Exemplo: Determine a área da superfície $z = x^2 + 2y$ que fica acima da região triangular T no plano xy com vértices $(0, 0), (1, 0)$ e $(1, 1)$.

Solução:



A região T é descrita por $T = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$.

Logo, a área A é:

$$
\begin{aligned}
A &= \iint_T \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\ dA \\
&= \int_0^1 \left[\int_0^x \sqrt{(2x)^2 + (2)^2 + 1}\ dy\right] dx \\
&= \int_0^1 \left[\int_0^x \sqrt{4x^2 + 5}\ dy\right] dx = \int_0^1 \left[y\sqrt{4x^2+5}\Big|_{y=0}^{y=x}\right] dx = \int_0^1 x\sqrt{4x^2+5}\ dx = (*)
\end{aligned}
$$

Usando a substituição $u = 4x^2 + 5$, temos $du = 8xdx$. Os limites de integração mudam de $x = 0 \Rightarrow u = 5$ e $x = 1 \Rightarrow u = 9$. Assim,

$$
(*) = \int_5^9 \frac{1}{8}\sqrt{u}\ du = \frac{1}{8}\left[\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_5^9 = \frac{1}{12}\left[9^{3/2} - 5^{3/2}\right] = \frac{1}{12}(27 - 5\sqrt{5})
$$

3.2. Massa e Densidade

Seja B uma região plana de uma lâmina. Uma função $\delta : B \to \mathbb{R}$ contínua e positiva é chamada de **função densidade superficial de massa** associada a B se, para toda sub-região $B_1 \subseteq B$, a massa de B_1 é:

$$
\text{massa de } B_1 = \iint_{B_1} \delta(x, y)\ dA
$$

desde que a integral exista. Nesse caso, a massa total da lâmina é:

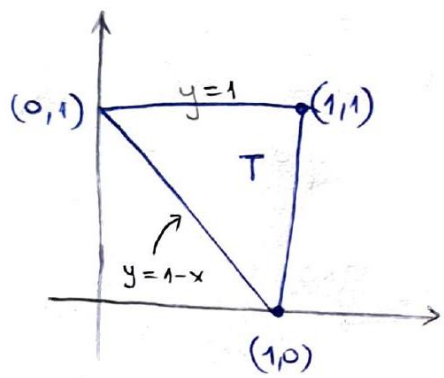
$$
\text{massa de } B = \iint_B \delta(x, y)\ dA
$$

Se a densidade é constante, $\delta(x, y) = k$, então a massa é $m = k \cdot A(B)$, onde $A(B)$ é a área de B. Nesse caso, dizemos que a lâmina é **homogênea**. Caso contrário, ela é dita **não-homogênea**.

Há ainda outros tipos de densidade que podem ser tratados da mesma maneira, como a densidade de carga elétrica, que veremos no exemplo a seguir.

Exemplo: Uma carga elétrica está distribuída na região triangular T da figura, de modo que a densidade de carga em (x, y) é $\delta(x, y) = xy$, medida em coulombs por metro quadrado (C/m^2). Determine a carga total.

Solução:



Temos

$$
\begin{aligned}
\text{Carga Total} &= \iint_T \delta(x,y)\ dA \\
&= \int_0^1 \left[\int_{1-x}^1 xy\ dy\right] dx = \int_0^1 \left[x\frac{y^2}{2}\right]_{y=1-x}^{y=1} dx \\
&= \int_0^1 \frac{x}{2}[1^2-(1-x)^2]dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (2x^2-x^3)dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{2x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{5}{24}
\end{aligned}
$$

3.3. Momentos e Centro de Massa

Seja B a região ocupada por uma lâmina e $\delta(x,y)$ sua função de densidade. O **momento de massa em relação ao eixo** x é definido como:

$$M_x = \iint_B y \cdot \delta(x,y)\ dA$$

De modo semelhante, o **momento de massa em relação ao eixo** y é:

$$M_y = \iint_B x \cdot \delta(x,y)\ dA$$

O **centro de massa** $(\bar{x}, \bar{y})$ da lâmina é definido por:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{1}{m}\iint_B x \cdot \delta(x,y)\ dA, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{1}{m}\iint_B y \cdot \delta(x,y)\ dA$$

onde a massa total m é dada por $m = \displaystyle\iint_B \delta(x,y)\ dA$.

3.4. Momento de Inércia

Seja B a região ocupada por uma lâmina e $\delta(x,y)$ sua densidade. Definimos:

- **Momento de inércia em relação ao eixo x:** $I_x = \displaystyle\iint_B y^2 \delta(x,y)\ dA$.
- **Momento de inércia em relação ao eixo y:** $I_y = \displaystyle\iint_B x^2 \delta(x,y)\ dA$.
- **Momento de inércia em relação à origem** (ou momento polar de inércia): $I_0 = \displaystyle\iint_B \left(x^2+y^2\right) \delta(x,y)\ dA$.

Observe que $I_0 = I_x + I_y$.

4. Integrais Duplas em Coordenadas Polares

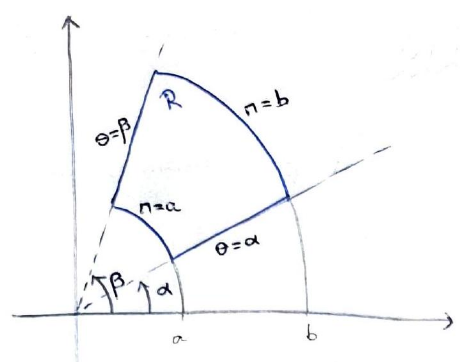
Esse é um caso particular de mudança de variáveis, veremos mais casos mais adiante.

As coordenadas polares (r,θ) de um ponto estão relacionadas com as coordenadas retangulares (x,y) pelas equações:

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad x = r\cos\theta, \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

A partir dessas relações, podemos definir um **retângulo polar**:

$$R = \{(r,\theta) \mid a \le r \le b, \alpha \le \theta \le \beta\}$$



Para calcular a integral dupla sobre um retângulo polar R, dividimos o intervalo $[a,b]$ em m subintervalos $[r_{i-1}, r_i]$ e o intervalo $[\alpha,\beta]$ em n subintervalos $[\theta_{j-1}, \theta_j]$, definindo novos retângulos R_{ij} e calculamos a área de cada R_{ij}.

Usando Soma de Riemann e a definição de integral dupla, concluímos o seguinte:

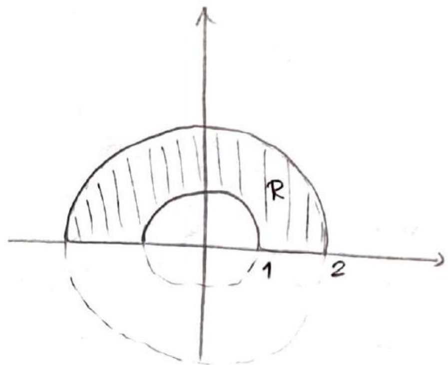
Teorema: Se f é contínua no retângulo polar R dado por $0 \le a \le r \le b, \alpha \le \theta \le \beta$, onde $0 \le \beta - \alpha \le 2\pi$, então:

$$\iint_R f(x,y)\ dA = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\ r\ dr\ d\theta$$

Exemplos:

1) Calcule $\displaystyle\iint_R \left(3x + 4y^2\right) dA$, onde R é a região no semiplano superior limitada pelos círculos $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$.

Solução:



A região é $R = \{(x, y) \mid y \geqslant 0, 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4\}$, que em coordenadas polares é dada por:

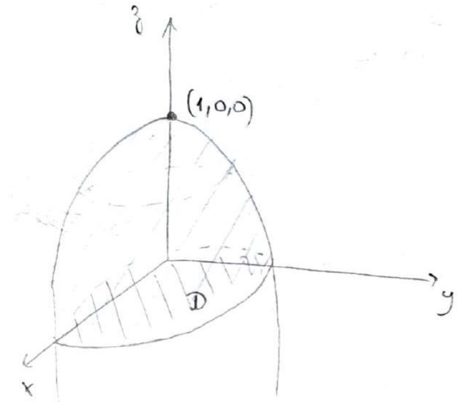
$$R = \{(r, \theta) \mid 1 \leqslant r \leqslant 2, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi\}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\iint_R (3x + 4y^2)\ dA &= \int_0^{\pi} \int_1^2 \left(3r\cos\theta + 4r^2 \operatorname{sen}^2\theta\right) r\ dr\ d\theta \\
&= \int_0^{\pi} \left[\int_1^2 \left(3r^2\cos\theta + 4r^3 \operatorname{sen}^2\theta\right) dr\right] d\theta \\
&= \int_0^{\pi} \left[r^3\cos\theta + r^4 \operatorname{sen}^2\theta\right]_{r=1}^{r=2} d\theta = \int_0^{\pi} \left(7\cos\theta + 15\operatorname{sen}^2\theta\right) d\theta \\
&= \int_0^{\pi} \left(7\cos\theta + \frac{15}{2}(1 - \cos 2\theta)\right) d\theta = \left[7\operatorname{sen}\theta + \frac{15}{2}\theta - \frac{15}{4}\operatorname{sen} 2\theta\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{15\pi}{2}
\end{aligned}$$

2) Determine o volume do sólido limitado pelo plano $z = 0$ e pelo paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$.

Solução:



Se tomarmos $z = 0$, então teremos $x^2 + y^2 = 1$.

Dessa forma, o sólido está abaixo do paraboloide e acima do disco D dado por $x^2 + y^2 \leq 1$. Em coordenadas polares, o disco é dado por:

$$D = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

Assim, o volume V é:

$$V = \iint_D \left(1 - x^2 - y^2\right) dA = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(1 - r^2\right) r \; dr \; d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(r - r^3\right) dr \; d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{r=1} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} d\theta = \frac{\pi}{2}$$

Note que, se trabalhássemos com coordenadas retangulares, teríamos

$$V = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left(1 - x^2 - y^2\right) dy dx,$$

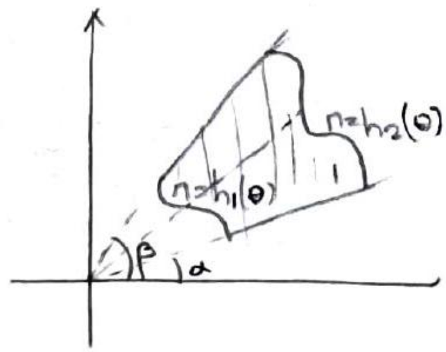
que não é fácil de calcular.

Corolário: Se f é contínua em uma região polar da forma

$$D = \{(r, \theta) \mid \alpha \leq \theta \leq \beta, \quad h_1(\theta) \leq r \leq h_2(\theta)\}$$

então

$$\iint_D f(x, y) \; dA = \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} f(r \cos\theta, r \operatorname{sen}\theta) r \; dr \; d\theta.$$

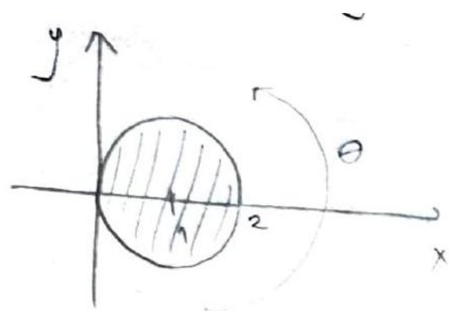


Exemplo:

3) Determine o volume do sólido que está sob o paraboloide $z = x^2 + y^2$, acima do plano xy e dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 2x$.

Solução:

O sólido está acima do disco D, cuja fronteira tem equação $x^2 - 2x + y^2 = 0$, ou seja, $(x-1)^2 + y^2 = 1$.



Em coordenadas polares, substituindo $x^2 + y^2 = r^2$ e $x = r\cos\theta$, a equação da fronteira se torna:

$$r^2 = 2r\cos\theta \quad \Leftrightarrow \quad r = 2\cos\theta$$

A região D é varrida quando θ vai de $-\pi/2$ a $\pi/2$. Logo,

$$D = \left\{(r,\theta) \mid -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq 2\cos\theta\right\}$$

Portanto, o volume V é:

$$V = \iint_D (x^2+y^2)\ dA = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_0^{2\cos\theta} r^2 \cdot r\ dr\right] d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{r=2\cos\theta} d\theta$$
$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2\cos\theta)^4}{4} d\theta = 4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta d\theta = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta d\theta$$
$$= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1+2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta\right) d\theta$$
$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1+2\cos 2\theta+\frac{1+\cos 4\theta}{2}\right) d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{2}+2\cos 2\theta+\frac{1}{2}\cos 4\theta\right) d\theta$$
$$= 2\left[\frac{3}{2}\theta+\operatorname{sen} 2\theta+\frac{1}{8}\operatorname{sen} 4\theta\right]_0^{\pi/2} = 2\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{2}+0+0\right) = \frac{3\pi}{2}$$

5. Integrais Triplas

5.1. Definição

Seja A o paralelepípedo $a \leq x \leq a_1, b \leq y \leq b_1, c \leq z \leq c_1$. Sejam $P_1 : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = a_1$; $P_2 : b = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_m = b_1$ e $P_3 : c = z_0 < z_1 < z_2 < \ldots < z_p = c_1$ partições de $[a,a_1],[b,b_1]$ e $[c,c_1]$, respectivamente. O conjunto de todas as ternas (x_i,y_j,z_k) denomina-se partição do paralelepípedo A. Uma partição de A determina $m\cdot n\cdot p$ paralelepípedos A_{ijk}.

Seja $B \subseteq \mathbb{R}^3$. Dizemos que B é limitado se existir um paralelepípedo A tal que $B \subseteq A$.

Seja $f : B \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, com B limitado. Assim, existe um paralelepípedo A de faces paralelas aos planos coordenados que contém B. Seja P uma partição de A. Definimos

$$\iiint_B f(x,y,z)dxdydz = \lim_{\Delta\to 0} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{p} f\left(x_{ijk}\right)\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$$

quando o limite existe.

5.2. Uma condição suficiente para integrabilidade

Definição: Seja $D \subseteq \mathbb{R}^3$. Dizemos que D tem conteúdo nulo se, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existir um número finito de paralelepípedos $A_1,\ldots,A_n$ tais que $D \subseteq A_1 \cup \ldots \cup A_n$ e $\sum_{i=1}^n m\left(A_i\right) < \varepsilon$, onde $m\left(A_i\right)$ é o volume de A_i.

Teorema: Seja $B \subseteq \mathbb{R}^3$ um conjunto limitado e $f : B \to \mathbb{R}$ uma função contínua e limitada. Se a fronteira de B tiver conteúdo nulo, então f será integrável em B.

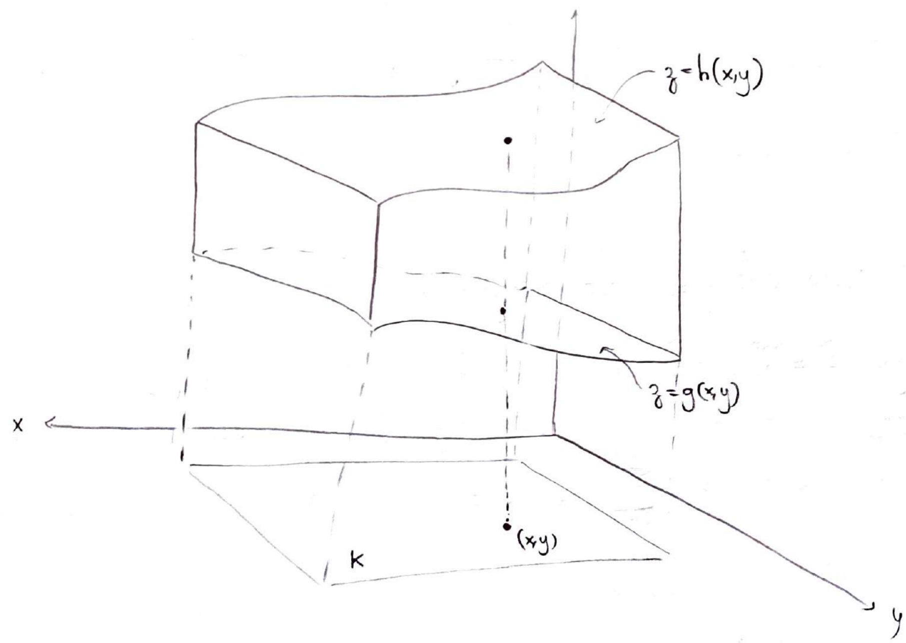
Observação: As propriedades que enunciamos para integrais duplas também são válidas para integrais triplas.

5.3. Cálculo de uma Integral Tripla

Seja $K \subseteq \mathbb{R}^2$ um conjunto compacto com fronteira de conteúdo nulo e sejam $g(x,y)$ e $h(x,y)$ duas funções de valores reais, contínuas em K e tais que $g(x,y) \leq h(x,y), \forall (x,y) \in K$. Seja B o conjunto

$$B = \{(x,y,z) \mid g(x,y) \leq z \leq h(x,y), (x,y) \in K\}.$$

A fronteira de B tem conteúdo nulo.



Seja $f(x,y,z)$ contínua em B. Com procedimento análogo ao adotado nas integrais duplas, prova-se que

$$\iiint_B f(x,y,z)dxdydz = \iint_K \left[\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x,y,z)dz \right] dxdy$$

Com as devidas adaptações, temos também

$$\iiint_B f(x,y,z)dxdydz = \iint_K \left[\int_{g(x,z)}^{h(x,z)} f(x,y,z)dy \right] dxdz$$

onde $B = \{(x,y,z) \mid g(x,z) \leq y \leq h(x,z), (x,z) \in K\}$. E

$$\iiint_B f(x,y,z)dxdydz = \iint_K \left[\int_{g(y,z)}^{h(y,z)} f(x,y,z)dx \right] dydz$$

onde $B = \{(x,y,z) \mid g(y,z) \leq x \leq h(y,z), (y,z) \in K\}$.

Exemplos:

1) Calcule $\iiint_B x dx dy dz$, onde B é o conjunto de todos os pontos (x, y, z) tais que

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq x, \quad 0 \leq z \leq x + y.$$

Solução:

Temos

$$B = \{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq x + y, \quad (x, y) \in K\},$$

onde K é o triângulo $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x$.

Daí,

$$\begin{aligned}
\iiint_B x dx dy dz &= \iint_K \left[\int_0^{x+y} x dz \right] dx dy = \iint_K [xz]_{z=0}^{z=x+y} dx dy \\
&= \iint_K x(x+y) dx dy = \int_0^1 \left[\int_0^x (x^2 + xy) dy \right] dx \\
&= \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{xy^2}{2} \right]_{y=0}^{y=x} dx = \int_0^1 \left(x^3 + \frac{x^3}{2} \right) dx = \int_0^1 \frac{3}{2} x^3 dx = \frac{3}{8}
\end{aligned}$$

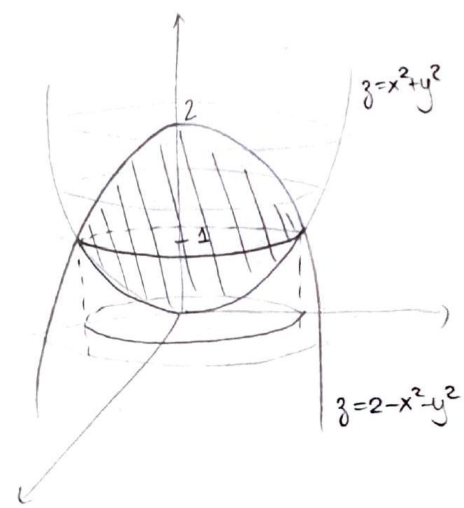
Definição: Seja B um subconjunto de $\mathbb{R}^3$, limitado e com fronteira de conteúdo nulo. Definimos o volume de B por:

$$\text{volume de } B = \iiint_B dx dy dz.$$

2) Calcule o volume do sólido definido por todos os (x, y, z) tais que $x^2 + y^2 \leq z \leq 2 - x^2 - y^2$.

Solução:

Primeiramente, vamos determinar a projeção do sólido no plano xy, ou seja, o conjunto K. Para isso, vamos encontrar a interseção dos gráficos $z = x^2 + y^2$ e $z = 2 - x^2 - y^2$.



Temos:

$$x^2+y^2=2-(x^2+y^2) \;\Leftrightarrow\; 2x^2+2y^2=2 \;\Leftrightarrow\; x^2+y^2=1.$$

A interseção é, então, a circunferência $x^2+y^2=1$ no plano $z=1$.

Sendo B o conjunto dado, temos: $B=\big\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\le z\le 2-x^2-y^2,(x,y)\in K\big\}$, onde K é o círculo $x^2+y^2\le 1$. Assim,

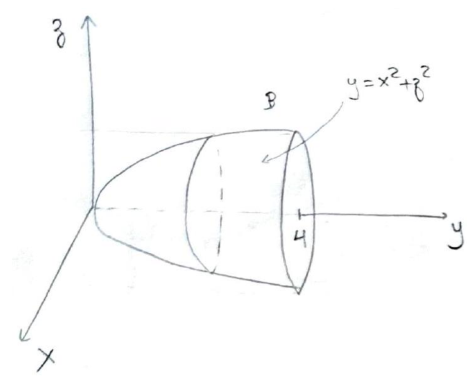
$$\begin{aligned}\text{vol.}B &= \iiint_B dxdydz = \iint_K\left[\int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2} dz\right]dxdy = \iint_K [z]_{z=x^2+y^2}^{z=2-x^2-y^2}dxdy\\ &= 2\iint_K \left(1-x^2-y^2\right)dxdy\end{aligned}$$

Passando para coordenadas polares:

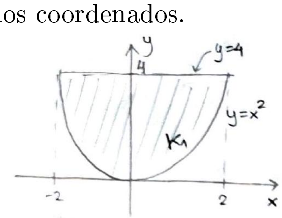
$$\begin{aligned}\text{vol.}B &= 2\int_0^{2\pi}\left[\int_0^1\left(1-\rho^2\right)\rho d\rho\right]d\theta = 2\int_0^{2\pi}\left[\int_0^1\left(\rho-\rho^3\right)d\rho\right]d\theta\\ &= 2\int_0^{2\pi}\left[\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 d\theta = 2\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)d\theta\\ &= 2\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}d\theta = \frac{1}{2}[\theta]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}(2\pi)=\pi\end{aligned}$$

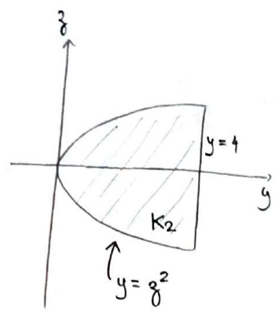
3) Calcule $\displaystyle\iiint_B \sqrt{x^2+z^2}dxdydz$, onde B é a região limitada pelo paraboloide $y=x^2+z^2$ e pelo plano $y=4$.

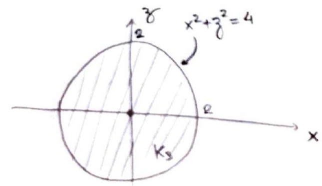
Solução:



Quais as possibilidades para a região de integração K? São as projeções do sólido B em cada um dos planos coordenados.







Se considerarmos a região K_1:

Precisamos escrever $g(x,y) \leq z \leq h(x,y)$. Temos $z = \pm\sqrt{y-x^2}$. Logo, $B = \left\{(x,y,z) \mid -\sqrt{y-x^2} \leq z \leq \sqrt{y-x^2}, (x,y) \in K_1\right\}$, onde $K_1 = \{(x,y) \mid -2 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 4\}$. Daí,

$$\iiint_B \sqrt{x^2+z^2}\,dxdydz = \int_{-2}^{2}\left[\int_{x^2}^{4}\left[\int_{-\sqrt{y-x^2}}^{\sqrt{y-x^2}} \sqrt{x^2+z^2}\,dz\right]dy\right]dx$$

que é extremamente difícil de calcular!

Para K_2, teremos um problema parecido.

Vejamos o que acontece com K_3:

Temos $x^2+z^2 \leq y \leq 4$. logo, $B = \left\{(x,y,z) \mid x^2+z^2 \leq y \leq 4, (x,z) \in K_3\right\}$, onde K_3 é o círculo $x^2+z^2 \leq 4$.

Daí,

$$\begin{aligned}\iiint_B \sqrt{x^2+z^2}\,dxdydz &= \iint_{K_3}\left[\int_{x^2+z^2}^{4} \sqrt{x^2+z^2}\,dy\right]dxdz \\ &= \iint_{K_3}\left(4-x^2-z^2\right)\sqrt{x^2+z^2}\,dxdz\end{aligned}$$

Em coordenadas polares:

$$\begin{aligned}&= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^2 \left(4-\rho^2\right)\sqrt{\rho^2}\cdot\rho d\rho\right]d\theta = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^2 (4\rho^2-\rho^4)d\rho\right]d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\left[\frac{4\rho^3}{3}-\frac{\rho^5}{5}\right]_0^2 d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\frac{32}{3}-\frac{32}{5}\right)d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{64}{15}d\theta = \frac{128\pi}{15}\end{aligned}$$

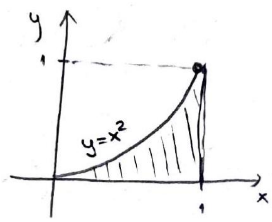
4) Expresse a integral iterada $\displaystyle\int_0^1\int_0^{x^2}\int_0^y f(x,y,z)dzdydx$ como uma integral tripla e, então, reescreva-a como uma integral iterada em uma ordem diferente, integrando primeiro em relação a x, depois a z, e então a y.

Solução:
Podemos escrever

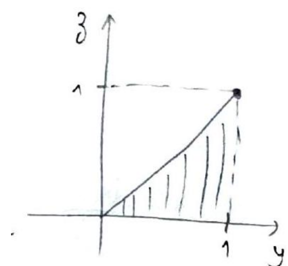
$$\int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^y f(x,y,z)dzdydx = \iiint_B f(x,y,z)dV,$$

onde $B = \{(x,y,z) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x^2, 0 \le z \le y\}$. Essa descrição de B nos permite escrever as projeções sobre os três planos coordenados, como a seguir:

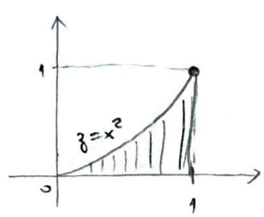
- sobre o plano xy: $K_1 = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x^2\} = \{(x,y) \mid 0 \le y \le 1, \sqrt{y} \le x \le 1\}$



- sobre o plano yz: $K_2 = \{(y,z) \mid 0 \le y \le 1, 0 \le z \le y\} = \{(y,z) \mid 0 \le z \le 1, z \le y \le 1\}$



- sobre o plano xz: $K_3 = \{(x,z) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le z \le x^2\} = \{(x,z) \mid 0 \le z \le 1, \sqrt{z} \le x \le 1\}$



Para integrar primeiro em relação a x, depois a z e, por último, a y, usamos a seguinte descrição alternativa de B:

$$B = \{(x,y,z) \mid 0 \le y \le 1, 0 \le z \le y, \sqrt{y} \le x \le 1\}.$$

Logo,

$$\iiint_B f(x,y,z)dV = \int_0^1 \int_0^y \int_{\sqrt{y}}^1 f(x,y,z)dxdzdy.$$

5.4. Aplicações de Integrais Triplas

Além de calcular o volume de um sólido, como já vimos, todas as aplicações de integrais duplas podem ser estendidas para integrais triplas.

Se $\delta(x,y,z)$ é a função densidade de um objeto que ocupa uma região B, então sua massa é

$$m_B = \iiint_B \delta(x,y,z)dV.$$

e seus momentos em relação aos três planos coordenados são:

$$M_{yz} = \iiint_B x\delta(x,y,z)dV,$$

$$M_{xz} = \iiint_B y\delta(x,y,z)dV,$$

$$M_{xy} = \iiint_B z\delta(x,y,z)dV.$$

O centro de massa está localizado no ponto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, onde

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m}, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m}, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}.$$

Os momentos de inércia em relação aos três eixos coordenados são:

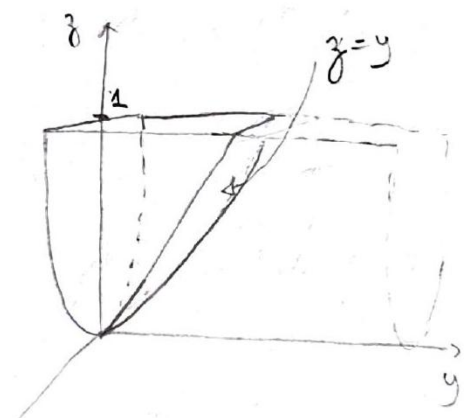
$$I_x = \iiint_B \left(y^2+z^2\right)\delta(x,y,z)dV, \quad I_y = \iiint_B \left(x^2+z^2\right)\delta(x,y,z)dV,$$
$$I_z = \iiint_B \left(x^2+y^2\right)\delta(x,y,z)dV.$$

Exemplo: Determine a massa de um sólido com densidade constante δ que é limitado pelo cilindro parabólico $z = x^2$ e pelos planos $y = z$, $y = 0$ e $z = 1$.

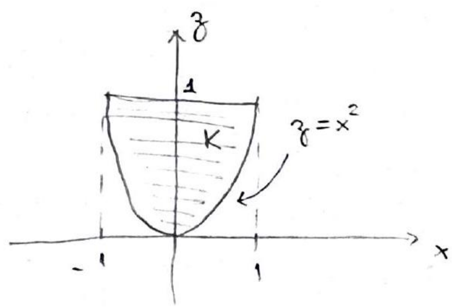
Solução:

O sólido B pode ser descrito como

$$B = \{(x,y,z) \mid 0 \le y \le z, (x,z) \in K\},$$



onde $K = \{(x,z) \mid -1 \leq x \leq 1, x^2 \leq z \leq 1\}$.

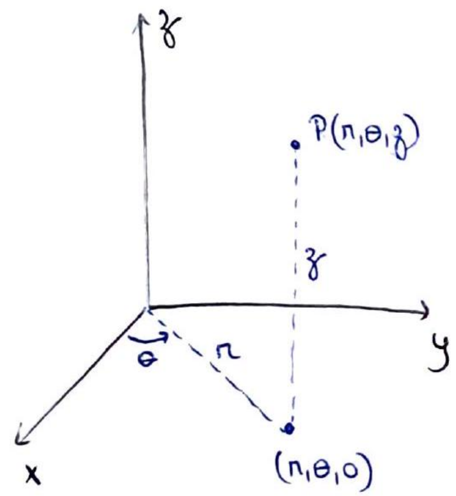


Então, se a densidade $\delta(x,y,z) = \delta$, a massa é

$$\begin{aligned} m &= \iiint_B \delta dV = \iint_K \left[\int_0^z \delta dy\right] dxdz \\ &= \delta \iint_K [y]_{y=0}^{y=z} dxdz = \delta \int_{-1}^1 \left[\int_{x^2}^1 z dz\right] dx = \delta \int_{-1}^1 \left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=x^2}^{z=1} dx \\ &= \frac{\delta}{2}\int_{-1}^1 (1-x^4)\, dx = \frac{\delta}{2}\left[x - \frac{x^5}{5}\right]_{-1}^1 = \frac{\delta}{2}\left[\left(1-\frac{1}{5}\right) - \left(-1+\frac{1}{5}\right)\right] = \frac{\delta}{2}\left[\frac{4}{5} - \left(-\frac{4}{5}\right)\right] = \frac{4\delta}{5}. \end{aligned}$$

6. Integrais Triplas em Coordenadas Cilíndricas

Seja P um ponto em $\mathbb{R}^3$. P é representado pela tripla ordenada (r, θ, z), onde (r,θ) são as coordenadas polares da projeção de P no plano xy e z é a distância orientada do plano xy a P.



Para convertermos de coordenadas cilíndricas para retangulares, usaremos as equações:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta, \quad z = z$$

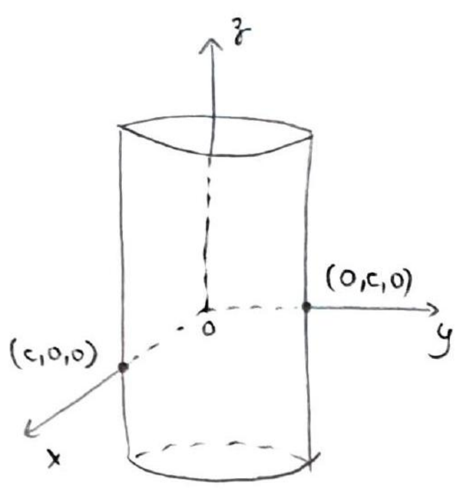
enquanto que para converter de coordenadas retangulares para cilíndricas, usamos:

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \mathrm{tg}\,\theta = \frac{y}{x}, \quad z = z.$$

Exemplos:

1) Considere o cilindro circular com equação cartesiana $x^2 + y^2 = c^2$. Seu eixo de simetria é o eixo z.

Em coordenadas cilíndricas sua equação é simplesmente $r = c$ (com θ e z livres).

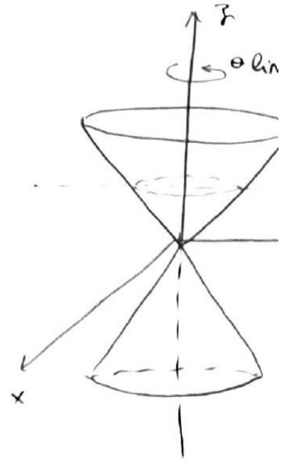


2) Descreva a superfície cuja equação em coordenadas cilíndricas é $z = r$.
Solução:

Note que

$$z^2 = r^2 = x^2 + y^2.$$

Assim, temos que a equação $z = r$ representa o cone $z^2 = x^2+y^2$ em coordenadas cartesianas.

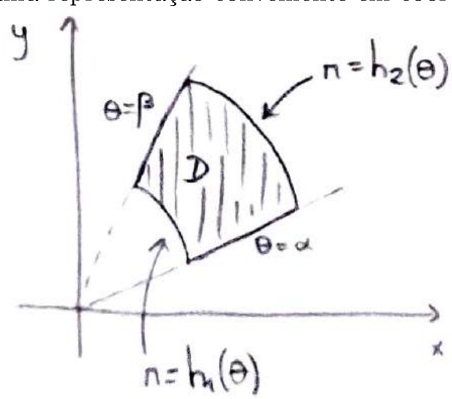


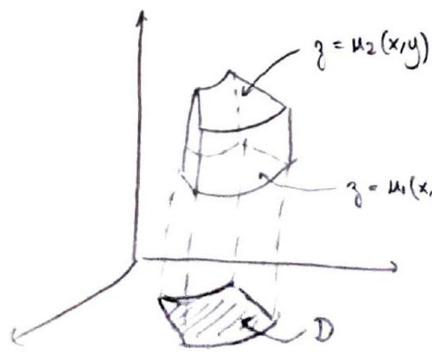
Cálculo de Integrais Triplas com Coordenadas Cilíndricas

Seja E uma região tal que

$$E = \{(x, y, z) \mid u_1(x, y) \leqslant z \leqslant u_2(x, y), (x, y) \in D\}$$

e a projeção D tenha uma representação conveniente em coordenadas polares.





Assim,

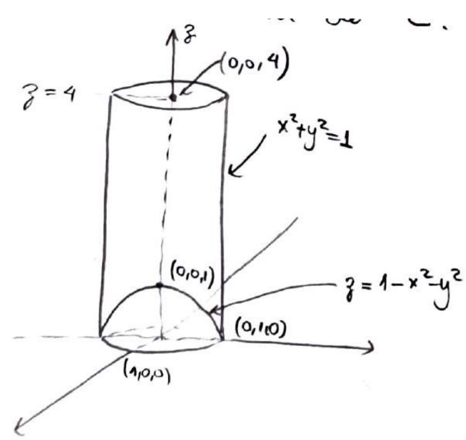
$$\iiint_E f(x,y,z)dV = \iint_D \left[\int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f(x,y,z)dz\right] dA$$
$$= \int_\alpha^\beta \int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} \int_{u_1(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)}^{u_2(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)} f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, z)r\ dzdrd\theta$$

onde esta última é a fórmula para integração tripla em coordenadas cilíndricas.

Exemplo:

1) Um sólido E está contido no cilindro $x^2+y^2=1$, abaixo do plano $z=4$ e acima do paraboloide $z=1-x^2-y^2$. A densidade em qualquer ponto é proporcional à distância do ponto ao eixo do cilindro. Determine a massa de E.

Solução:



Em coordenadas cilíndricas:

- cilindro: $r=1$ (θ livre, z livre)
- paraboloide: $z=1-r^2$ (θ livre)

Assim,

$$E = \{(r,\theta,z) \mid 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le r \le 1,\ 1-r^2 \le z \le 4\}$$

Por outro lado, como a densidade em (x, y, z) é proporcional à distância ao eixo z, temos

$$\delta(x, y, z) = k\sqrt{x^2 + y^2} = k \cdot r$$

onde k é constante.

Portanto, a massa m é

$$\begin{aligned} m &= \iiint_E \delta(x, y, z)dV = \iiint_E k\sqrt{x^2 + y^2}dV \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{1-r^2}^4 (kr) \cdot r dz dr d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 kr^2[z]_{z=1-r^2}^{z=4} dr d\theta \\ &= k\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\left[4 - \left(1 - r^2\right)\right] dr d\theta = k\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(3r^2 + r^4\right) dr d\theta \\ &= k\int_0^{2\pi}\left[r^3 + \frac{r^5}{5}\right]_{r=0}^{r=1} d\theta = k\int_0^{2\pi}\left(1 + \frac{1}{5}\right) d\theta = k\left(\frac{6}{5}\right)[\theta]_0^{2\pi} = \frac{12k\pi}{5} \end{aligned}$$

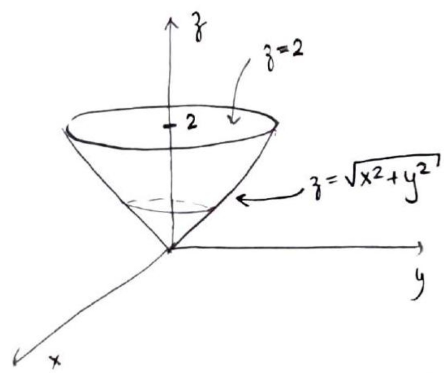
2) Calcule $I = \displaystyle\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} \left(x^2 + y^2\right) dz dy dx.$

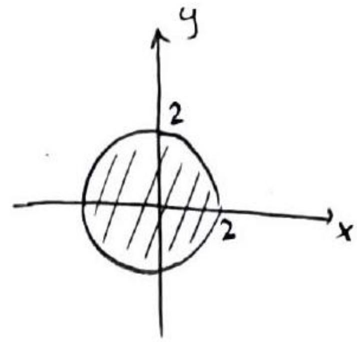
Solução:

A região de integração é:

$$E = \left\{(x, y, z) \mid -2 \le x \le 2, -\sqrt{4 - x^2} \le y \le \sqrt{4 - x^2}, \sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 2\right\}.$$

e a projeção de E sobre o plano xy é o disco $x^2 + y^2 \le 4$.





Em coordenadas cilíndricas:

$$E = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 2, r \leq z \leq 2\}$$

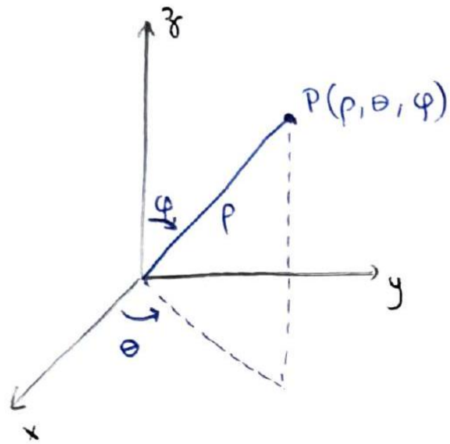
Logo, a integral se torna

$$\begin{aligned}
I &= \iiint_E \left(x^2 + y^2\right) dV = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_r^2 r^2 \cdot r dz dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^3 [z]_{z=r}^{z=2} dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^3 (2-r) dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (2r^3 - r^4) dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{2r^4}{4} - \frac{r^5}{5}\right]_{r=0}^{r=2} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{2 \cdot 16}{4} - \frac{32}{5}\right) d\theta = \int_0^{2\pi} \left(8 - \frac{32}{5}\right) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{40 - 32}{5}\right) d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{8}{5} d\theta = \frac{8}{5}[2\pi] = \frac{16\pi}{5}
\end{aligned}$$

7. Integrais Triplas em Coordenadas Esféricas

Seja P um ponto em $\mathbb{R}^3$. Ele é representado pela tripla ordenada (ρ, θ, φ), onde $\rho = |OP|$ é a distância da origem a P, θ é o mesmo ângulo que nas coordenadas cilíndricas e φ é o ângulo entre o eixo z positivo e o segmento de reta OP. Observe que

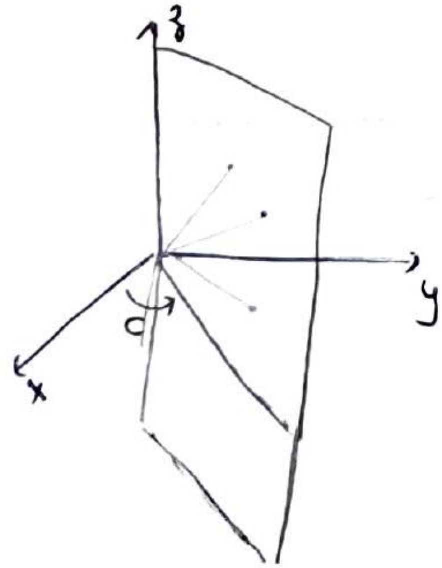
$$\rho \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi.$$



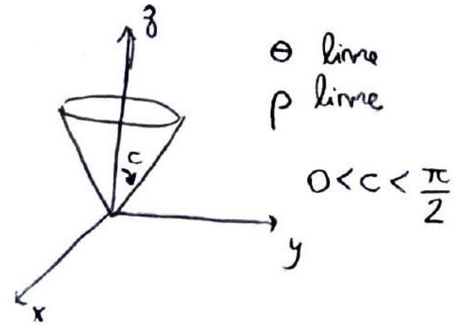
Exemplos:

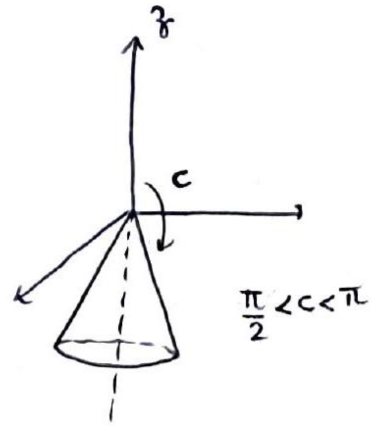
1) A esfera de centro na origem e raio c tem equação $\rho = c$ em coordenadas esféricas.

2) $\theta = c$ é a equação de um semiplano vertical (ρ e φ livres):

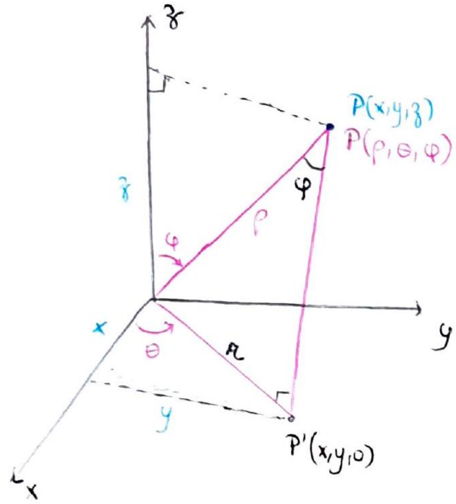


3) $\varphi = c$ é um semicone:





Considere a figura:



Usando semelhança de triângulos e propriedades trigonométricas, temos as relações de conversão:

$$x = \rho \operatorname{sen} \varphi \cos \theta$$
$$y = \rho \operatorname{sen} \varphi \sin \theta$$
$$z = \rho \cos \varphi$$

Além disso,

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

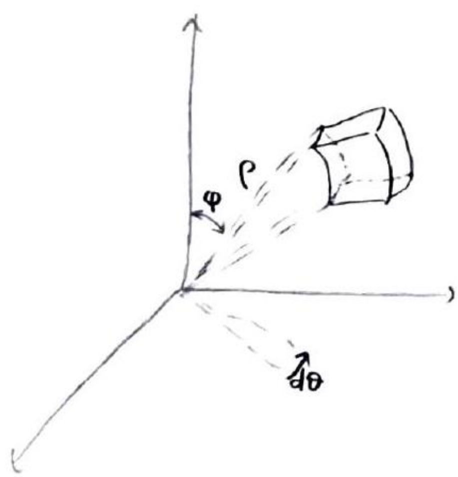
Cálculo de Integrais Triplas com Coordenadas Esféricas

Procedendo de maneira similar ao que foi feito em coordenadas polares (em $\mathbb{R}^2$), é possível mostrar a seguinte fórmula para integração tripla em coordenadas esféricas:

$$\iiint_E f(x,y,z)dV = \int_c^d \int_\alpha^\beta \int_a^b f(\rho \operatorname{sen} \varphi \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta, \rho \cos \varphi)\rho^2 \operatorname{sen} \varphi d\rho d\theta d\varphi$$

onde E é uma cunha esférica (um setor esférico) dada por

$$E = \{(\rho, \theta, \varphi) \mid a \leq \rho \leq b, \quad \alpha \leq \theta \leq \beta, \quad c \leq \varphi \leq d\}.$$



Essa fórmula pode ser estendida para incluir regiões esféricas mais gerais, como

$$E = \{(\rho, \theta, \varphi) \mid \alpha \leq \theta \leq \beta, c \leq \varphi \leq d, g_1(\theta, \varphi) \leq \rho \leq g_2(\theta, \varphi)\}$$

Exemplos:

1) Calcule $\iiint_B e^{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} dV$, onde B é a bola unitária:

$$B = \left\{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\right\}.$$

Solução:

Como a fronteira de B é uma esfera, utilizaremos coordenadas esféricas. Temos:

$$B = \{(\rho, \theta, \varphi) \mid 0 \leqslant \rho \leqslant 1, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi\}$$

Além disso, $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Logo,

$$\iiint_B e^{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} dV = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 e^{\left(\rho^2\right)^{3/2}} \cdot \rho^2 \operatorname{sen}\varphi d\rho d\theta d\varphi$$
$$= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho^2 e^{\rho^3} \operatorname{sen}\varphi d\rho d\theta d\varphi$$

Fazendo a substituição $u = \rho^3$, temos $du = 3\rho^2 d\rho$ e

$$= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\varphi \left(\int_0^1 \frac{e^u}{3} du \right) d\theta d\varphi = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}\varphi}{3} \cdot \left[e^u\right]_0^1 d\theta d\varphi$$
$$= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}\varphi}{3} \cdot (e-1) d\theta d\varphi = \frac{e-1}{3} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\varphi \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) d\varphi$$
$$= \frac{e-1}{3} \cdot 2\pi \cdot \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\varphi d\varphi = \frac{2\pi(e-1)}{3} \cdot \left[-\cos\varphi\right]_0^{\pi}$$
$$= \frac{2\pi(e-1)}{3} \cdot (-\cos(\pi) - (-\cos(0))) = \frac{2\pi(e-1)}{3} \cdot (-(-1) - (-1)) = \frac{4\pi}{3}(e-1)$$

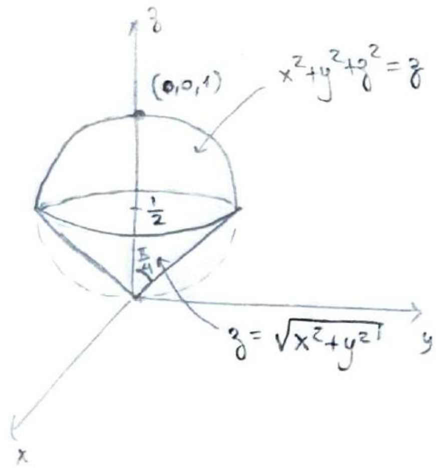
2) Determine o volume do sólido que fica acima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e abaixo da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = z$.

Solução:

Note que a equação da esfera pode ser reescrita como:

$$x^2 + y^2 + z^2 - z = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Esta é a esfera de centro $\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$ e raio $\frac{1}{2}$, que passa pela origem.



Em coordenadas esféricas:

- esfera: $\rho^2 = z \implies \rho^2 = \rho\cos\varphi$, o que nos dá $\rho = \cos\varphi$.
- cone: $z = \sqrt{x^2+y^2} \implies \rho\cos\varphi = \sqrt{(\rho\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\theta)^2 + (\rho\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta)^2} = \sqrt{\rho^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi} = \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi \implies \cos\varphi = \mathrm{sen}\,\varphi$, ou seja, $\varphi = \frac{\pi}{4}$

Assim, a descrição do sólido E em coordenadas esféricas é

$$E = \left\{(\rho,\theta,\varphi) \mid 0 \le \theta \le 2\pi, \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}, \quad 0 \le \rho \le \cos\varphi\right\}$$

Portanto, o volume é:

$$\begin{aligned} V(E) &= \iiint_E dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{\cos\varphi} \rho^2\,\mathrm{sen}\,\varphi\, d\rho d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4} \mathrm{sen}\,\varphi \cdot \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_{\rho=0}^{\rho=\cos\varphi} d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{sen}\,\varphi\cos^3\varphi}{3} d\varphi d\theta \end{aligned}$$

Para a integral em φ, usamos a substituição $u = \cos\varphi$, $du = -\,\mathrm{sen}\,\varphi d\varphi$ e então

$$\begin{aligned} V(E) &= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\left[-\frac{\cos^4\varphi}{4}\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/4} d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\left(-\frac{(\sqrt{2}/2)^4}{4} - \left(-\frac{1^4}{4}\right)\right) d\theta \\ &= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\left(-\frac{4/16}{4} + \frac{1}{4}\right) d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{16} + \frac{4}{16}\right) d\theta \\ &= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\frac{3}{16} d\theta = \frac{1}{16}[\theta]_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{16} = \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

8. Mudança de Variáveis Quaisquer

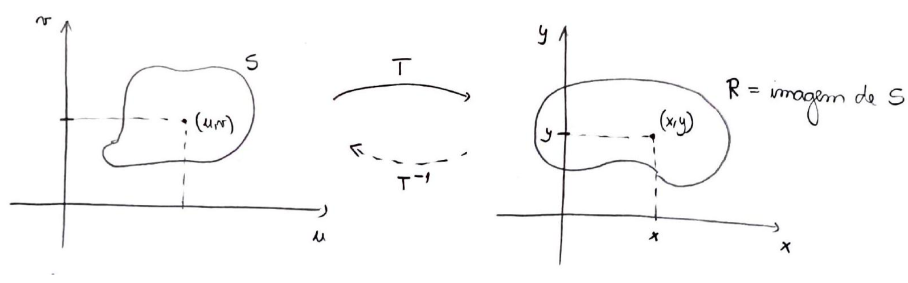
8.1. Integrais Duplas

Seja

$$\begin{aligned} T : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u,v) &\mapsto T(u,v) = (x,y) \end{aligned}$$

uma transformação (ou função) do plano uv no plano xy, onde x e y estão relacionados com u e v pelas equações:

$$x = g(u,v) \quad \text{e} \quad y = h(u,v)$$



Em geral, vamos considerar T uma transformação C^1, o que significa que g e h têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas.

Se não existem dois pontos com a mesma imagem, T é dita **injetora**.

Se restringirmos aos pontos da imagem e T for injetora, então existe uma transformação inversa T^{-1} do plano xy para o plano uv e, assim, é possível escrever u e v em termos de x e y:

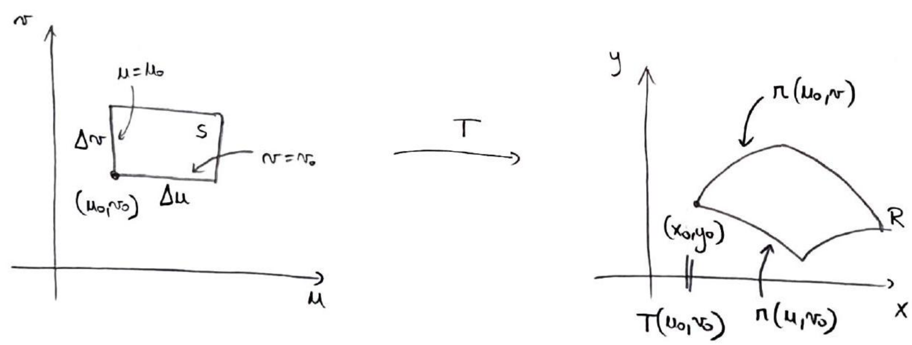
$$u = G(x,y) \quad \text{e} \quad v = H(x,y).$$

Podemos fazer a seguinte definição:

Definição: O **Jacobiano** da transformação $T : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $x = g(u,v)$ e $y = h(u,v)$ é

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

Vamos ver como a mudança de variáveis afeta a integral dupla.



Fazendo aproximações da área de R, relacionando-a com a transformação T e a área de S, e usando a definição de integral dupla, é possível mostrar o seguinte:

Teorema (Mudança de Variáveis em uma Integral Dupla): Seja $T : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação C^1 dada por $(x,y) = T(u,v)$, com $x = x(u,v)$ e $y = y(u,v)$, cujo Jacobiano seja não nulo. Sejam $B_{uv} \subseteq \Omega$, B_{uv} compacto e com fronteira de conteúdo nulo, e $B = T(B_{uv})$ a imagem de B_{uv}. Suponhamos que $T\left(\dot{B}_{uv}\right) = \dot{B}$ e T seja inversível no interior de B_{uv}. Nessas condições, se $f(x,y)$ for integrável em B, então

$$\iint_B f(x,y)dxdy = \iint_{B_{uv}} f(x(u,v), y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dudv$$

Exemplos:

1) Seja T a transformação do plano $r\theta$ para o plano xy dada por

$$x = r\cos\theta \quad \text{e} \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Temos

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\operatorname{sen}^2\theta = r > 0.$$

Assim,

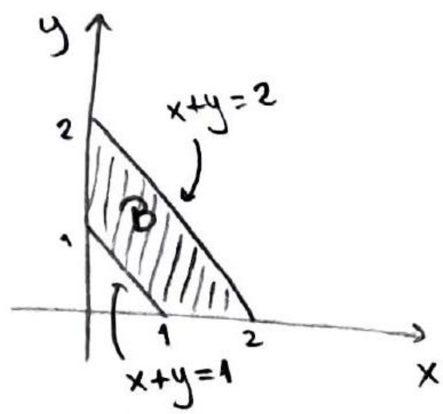
$$\begin{aligned} \iint_B f(x,y)dxdy &= \iint_{B_{r\theta}} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\cdot\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| drd\theta \\ &= \iint_{B_{r\theta}} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) r dr d\theta \end{aligned}$$

como já conhecíamos.

2) Calcule $\displaystyle\iint_B \frac{\cos(x-y)}{\operatorname{sen}(x+y)}dxdy$, onde B é o trapézio $1 \leq x+y \leq 2$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

Solução:

A região B é a seguinte:



Façamos a mudança de variável $u = x - y$ e $v = x + y$. Temos

$$\left\{ \begin{array}{l} u = x - y \\ v = x + y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{u}{2} + \frac{v}{2} \\ y = \frac{v}{2} - \frac{u}{2} \end{array} \right.$$

Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação dada anteriormente onde $(x,y) = T(u,v)$. Note que T é de classe C^1.

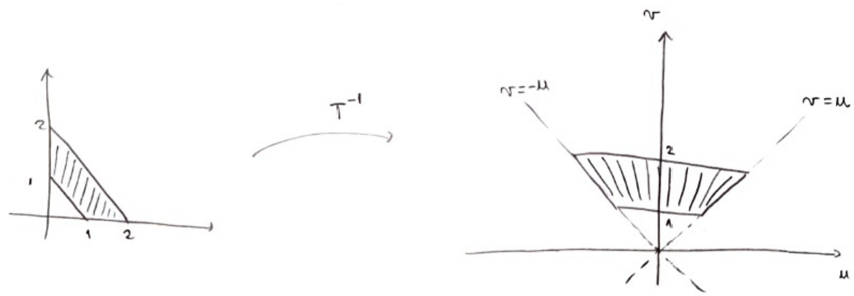
O Jacobiano de T é dado por:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} - (-\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}$$

Vamos determinar B_{uv} de modo que $B = T(B_{uv})$. Seja T^{-1} a inversa de T, então B_{uv} é a imagem de B por T^{-1}, onde

$$T^{-1} : \left\{ \begin{array}{l} u = x - y \\ v = x + y \end{array} \right. .$$

T^{-1} transforma as retas $x + y = 1$, $x + y = 2$, $y = 0$ e $x = 0$, respectivamente, nas retas $v = 1$, $v = 2$, $v = u$ e $v = -u$.



Daí,

$$\iint_B \frac{\cos(x-y)}{\operatorname{sen}(x+y)} dxdy = \iint_{B_{uv}} \frac{\cos u}{\operatorname{sen} v} \cdot \frac{1}{2} dudv = \frac{1}{2} \int_1^2 \left[\int_{-v}^{v} \frac{\cos u}{\operatorname{sen} v} du \right] dv$$
$$= \frac{1}{2} \int_1^2 \left[\frac{\operatorname{sen} u}{\operatorname{sen} v} \right]_{u=-v}^{u=v} dv = \frac{1}{2} \int_1^2 \left[\frac{\operatorname{sen} v - \operatorname{sen}(-v)}{\operatorname{sen} v} \right] dv$$
$$= \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{2 \operatorname{sen} v}{\operatorname{sen} v} dv = \int_1^2 1\, dv = 1$$

3) Calcule $\displaystyle\iint_B x^2 dxdy$, onde B é o conjunto $x^2 + 4y^2 \leqslant 1$.
Solução:
Façamos a mudança de variáveis:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ 2y = r \operatorname{sen}\theta \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = \frac{1}{2} r \operatorname{sen}\theta \end{array} \right. \qquad (\circledast)$$

Temos

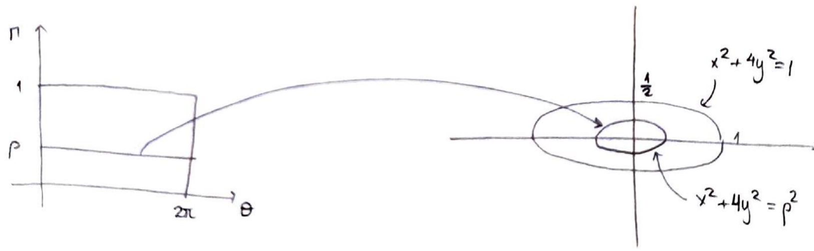
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta \\ \frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta & \frac{1}{2} r\cos\theta \end{vmatrix} = \frac{r}{2}\cos^2\theta - \left(-\frac{r}{2}\operatorname{sen}^2\theta\right) = \frac{r}{2}$$

Assim, $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = \frac{r}{2}$.

A mudança de variável $(\circledast)$ transforma o retângulo

$$B_{r\theta} = \{(r,\theta) \mid 0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

no conjunto B dado.



Temos, então:

$$\iint_B x^2 dxdy = \iint_{B_{r\theta}} (r\cos\theta)^2 \cdot \frac{r}{2} drd\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\cos^2\theta drd\theta$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\cdot\left[\frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{r=1} d\theta = \frac{1}{8}\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta}_{\pi} = \frac{\pi}{8}$$

Dica: para calcular a última integral, use que $\cos^2\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\theta)$.

8.2. Integrais Triplas

Seja $T : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação que leva uma região S no espaço uvw para uma região R no espaço xyz por meio das equações:

$$x = g(u,v,w), \quad y = h(u,v,w), \quad z = k(u,v,w).$$

Definição: O **Jacobiano** de T é dado por

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Sob hipóteses semelhantes àquelas do Teorema anterior, temos:
Teorema (de Mudança de Variáveis na Integral Tripla):

$$\iiint_B f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{B_{uvw}} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| dudvdw$$

Exemplos:
1) Considere a mudança de variáveis dada por (coordenadas esféricas):
$x = \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\theta, \quad y = \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta, \quad z = \rho\cos\varphi.$
O Jacobiano é:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)} = \cdots = -\rho^2\,\mathrm{sen}\,\varphi \quad \text{(Exercício!)}$$

Visto que $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, temos $\mathrm{sen}\,\varphi \geqslant 0$. Assim, $\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)}\right| = \rho^2\,\mathrm{sen}\,\varphi$. Portanto,

$$\iiint_B f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{B_{\rho\theta\varphi}} f(\rho\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta, \rho\cos\varphi)\cdot\rho^2\,\mathrm{sen}\,\varphi d\rho d\theta d\varphi,$$

como já sabíamos.

2) Calcule $\displaystyle\iiint_B \frac{\operatorname{sen}(x+y-z)}{x+2y+z}dxdydz$, onde B é o paralelepípedo $1 \leqslant x+2y+z \leqslant 2, \quad 0 \leqslant x+y-z \leqslant \frac{\pi}{4}$ e $0 \leqslant z \leqslant 1$.

Solução:

Façamos a mudança de variáveis:

$$\begin{cases} u = x+y-z \\ v = x+2y+z \\ w = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2u - v + 3w \\ y = -u + v - 2w \\ z = w \end{cases}$$

Segue que

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Além disso, B_{uvw} é o paralelepípedo

$$0 \leq u \leq \frac{\pi}{4}, \quad 1 \leq v \leq 2 \quad \text{e} \quad 0 \leq w \leq 1$$

Portanto,

$$\iiint_B \frac{\operatorname{sen}(x+y-z)}{x+2y+z}dxdydz = \iiint_{B_{uvw}} \frac{\operatorname{sen} u}{v}dudvdw = \int_1^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 \frac{\operatorname{sen} u}{v}dwdudv$$
$$= \int_1^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen} u}{v}[w]_0^1 dudv = \int_1^2 \frac{1}{v}[-\cos u]_{u=0}^{u=\frac{\pi}{4}} dv$$
$$= \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\int_1^2 \frac{1}{v}dv = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\ln 2$$

3) Calcule $\displaystyle\iiint_B zdxdydz$, onde B é o conjunto de todos (x,y,z) tais que $\dfrac{(x-1)^2}{4} + \dfrac{(y-1)^2}{9} + z^2 \leq 2z$.

Solução:

Note que

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} + z^2 \leqslant 2z \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} + (z-1)^2 \leq 1$$

Fazendo a mudança de variáveis:

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} = \rho \operatorname{sen}\varphi\cos\theta \\ \frac{y-1}{3} = \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \\ z-1 = \rho\cos\varphi \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 1 + 2\rho \operatorname{sen}\varphi\cos\theta \\ y = 1 + 3\rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \\ z = 1 + \rho\cos\varphi \end{cases}$$

Temos

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)} = 6\rho^2 \operatorname{sen}\varphi \quad \text{(Exercício!)}$$

Além disso, $B_{\rho\theta\varphi}$ é o paralelepípedo

$$0 \leqslant \rho \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

Segue que

$$\begin{aligned}
\iiint_B z dx dy dz &= \iiint_{B_{\rho\theta\varphi}} (1 + \rho\cos\varphi)|6\rho^2 \operatorname{sen}\varphi| d\rho d\theta d\varphi \\
&= 6\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 (1+\rho\cos\varphi)\rho^2 \operatorname{sen}\varphi d\rho d\varphi d\theta \\
&= 6\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 \left(\rho^2 \operatorname{sen}\varphi + \rho^3 \cos\varphi \operatorname{sen}\varphi\right) d\rho d\varphi d\theta \\
&= 6\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \left[\frac{\rho^3}{3}\operatorname{sen}\varphi + \frac{\rho^4}{4}\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi\right]_{\rho=0}^{\rho=1} d\varphi d\theta \\
&= 6\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \left(\frac{1}{3}\operatorname{sen}\varphi + \frac{1}{4}\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi\right) d\varphi d\theta \\
&= 6\cdot 2\pi\int_0^{\pi} \left(\frac{1}{3}\operatorname{sen}\varphi + \frac{1}{4}\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi\right) d\varphi \\
&= 12\pi\left[-\frac{1}{3}\cos\varphi + \frac{1}{4}\frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{2}\right]_0^{\pi} \\
&= 12\pi\left[\left(-\frac{1}{3}(-1)+0\right) - \left(-\frac{1}{3}(1)+0\right)\right] \\
&= 12\pi\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right] = 12\pi\cdot\frac{2}{3} = 8\pi
\end{aligned}$$