$6^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios
Cálculo Diferencial e Integra II - Curso: Engenharia Civil
Prof$^{\underline{a}}$ Liliam Carsava Merighe

Integrais Duplas

Faça os exercícios descritos abaixo. Esses exercícios foram retirados da seguinte referência: STEWART, J. Cálculo, v.2. 7 ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

Exercício 1 *Calcule a integral iterada:*

a) $\displaystyle\int_1^4 \int_0^2 (6x^2 - 2x)\; dydx$

b) $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{\pi/2} x\,\mathrm{sen} y\; dydx$

c) $\displaystyle\int_{-3}^3 \int_0^{\pi/2} (y + y^2\cos x)\; dxdy$

d) $\displaystyle\int_0^1 \int_1^2 \frac{x\,\mathrm{e}^x}{y}\; dydx$

e) $\displaystyle\int_1^4 \int_1^2 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)\; dydx$

f) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 v(u - v^2)^4\; dudv$

g) $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{\pi} r\,\mathrm{sen}^2\theta\; d\theta dr$

h) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 \sqrt{s + t}\; dsdt$

Exercício 2 *Calcule a integral dupla:*

a) $\displaystyle\iint_R \mathrm{sen}(x + y)\; dA,$ *onde* $R = \{(x, y) \mid 0 \le x \le \pi/2,\ 0 \le y \le \pi/2\}.$

b) $\displaystyle\iint_R \frac{xy^2}{x^2 + 1}\; dA,$ *onde* $R = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1,\ -3 \le y \le 3\}.$

c) $\displaystyle\iint_R y\,\mathrm{e}^{-xy}\; dA,$ *onde* $R = [0, 2] \times [0, 3].$

d) $\displaystyle\iint_R \frac{1}{1 + x + y}\; dA,$ *onde* $R = [1, 3] \times [1, 2].$

Exercício 3 *Determine o volume do sólido que se encontra abaixo do plano* $4x + 6y - 2z + 15 = 0$ *e acima do retângulo* $R = \{(x, y) \mid -1 \le x \le 2, -1 \le y \le 1\}.$

Exercício 4 *Determine o volume do sólido que está abaixo do paraboloide elíptico* $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z = 1$ *e acima do retângulo* $R = [-1, 1] \times [-2, 2].$

Exercício 5 *Encontre o volume do sólido no primeiro octante limitado pelo cilindro* $z = 16 - x^2$ *e pelo plano* $y = 5.$

Exercício 6 *Calcule a integral iterada:*

a) $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^2}^{x} (1 + 2y)\; dydx$

b) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{s^2} \cos(s^3)\; dtds$

Exercício 7 *Calcule a integral dupla:*

a) $\displaystyle\iint_D y^2\; dA,$ *onde* $D = \{(x, y) \mid -1 \le y \le 1,\ -y - 2 \le x \le y\}.$

b) $\displaystyle\iint_D x\ dA,$ *onde* $D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le \operatorname{sen} x\}.$

c) $\displaystyle\iint_D (x^2+2y)\ dA$ *onde* D *é limitada por* $y = x$, $y = x^3$, $x \ge 0$.

d) $\displaystyle\iint_D y^2\ dA$ *onde* D *é a região triangular com vértices* $(0,1)$, $(1,2)$, $(4,1)$.

Exercício 8 *Considere a integral:* $\displaystyle\iint_D y\ dA$, *onde* D *é limitada por* $y = x - 2$ *e* $x = y^2$. *Defina as integrais iteradas para ambas as ordens de integração. Então, calcule a integral dupla usando a ordem mais fácil e explique por que ela é mais fácil.*

Exercício 9 *Determine o volume do sólido abaixo da superfície* $z = 2x + y^2$ *e acima da região limitada por* $x = y^2$ *e* $x = y^3$.

Exercício 10 *Determine o volume do sólido limitado pelo paraboloide* $z = x^2 + 3y^2$ *e pelos planos* $x = 0$, $y = 1$, $y = x$, $z = 0$.

Exercício 11 *Esboce a região de integração e mude a ordem de integração:*

a) $\displaystyle\int_0^2 \int_{x^2}^4 f(x,y)\ dydx$

c) $\displaystyle\int_1^2 \int_0^{\ln x} f(x,y)\ dydx$

b) $\displaystyle\int_{-2}^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\ dxdy$

Exercício 12 *Calcule a integral trocando a ordem de integração:*

a) $\displaystyle\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2}\ dxdy$

b) $\displaystyle\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{1}{y^3+1}\ dxdy$

Exercício 13 *No cálculo de uma integral dupla sobre uma região* D, *obtivemos uma soma de integrais iteradas como a que segue:*

$$\iint_D f(x,y)\ dA = \int_0^1 \int_0^{2y} f(x,y)\ dxdy + \int_1^3 \int_0^{3-y} f(x,y)\ dxdy$$

Esboce a região D *e expresse a integral dupla como uma integral iterada com ordem de integração contrária.*

Exercício 14 *Calcule a integral dada, colocando-a em coordenadas polares:*

a) $\displaystyle\iint_D x^2 y\ dA$, *onde* D *é a metade superior do disco com centro na origem e raio* 5.

b) $\displaystyle\iint_R (2x - y)\ dA$, *onde* R *é a região do primeiro quadrante limitada pelo círculo* $x^2 + y^2 = 4$ *e pelas retas* $x = 0$ *e* $y = x$.

c) $\displaystyle\iint_R \operatorname{sen}(x^2+y^2)\ dA$, *onde* R *é a região do primeiro quadrante entre os círculos com centro na origem e raios* 1 *e* 3.

Exercício 15 *Utilize coordenadas polares para determinar o volume do sólido limitado pelo hiperboloide* $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$ *e pelo plano* $z = 2$.

Exercício 16 *Utilize coordenadas polares para determinar o volume do sólido que se situa dentro da esfera* $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ *e fora do cilindro* $x^2 + y^2 = 4$.

Exercício 17 *Utilize coordenadas polares para combinar a soma*

$$\int_{1/\sqrt{2}}^{1} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{x} xy \; dydx + \int_{1}^{\sqrt{2}} \int_{0}^{x} xy \; dydx + \int_{\sqrt{2}}^{2} \int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} xy \; dydx$$

em uma única integral dupla. Em seguida calcule essa integral dupla.

Exercício 18 *Determine a massa e o centro de massa da lâmina que ocupa a região* D *e tem função densidade* ρ*:*

a) $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 4\}$; $\rho(x, y) = ky^2$.

b) D *é limitada por* $y = 1 - x^2$ *e* $y = 0$; $\rho(x, y) = ky$.

Exercício 19 *Uma lâmina ocupa a parte do disco* $x^2 + y^2 \leq 1$ *no primeiro quadrante. Determine o centro de massa se a densidade em qualquer ponto for proporcional à distância do ponto ao eixo* x.

Exercício 20 *Determine a área da superfície:*

a) *A parte do plano* $z = 2 + 3x + 4y$ *que está acima do retângulo* $[0, 5] \times [1, 4]$.

b) *A parte do plano* $3x + 2y + z = 6$ *que está no primeiro octante.*

c) *A parte do paraboloide* $z = 4 - x^2 - y^2$ *que está acima do plano* xy.