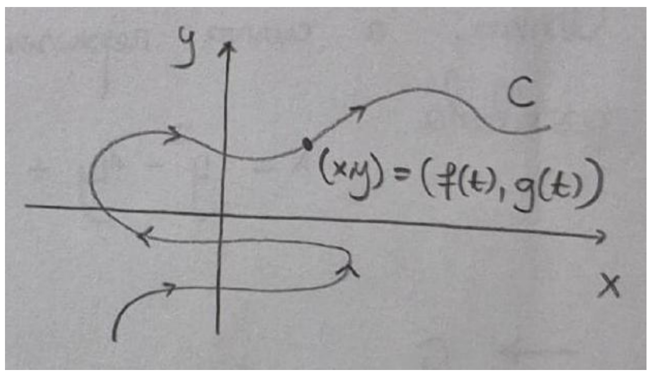
Equações Paramétricas e Coordenadas Polares

1. Curvas definidas por equações paramétricas

Suponha que x e y sejam ambas dadas como funções de uma terceira variável t (denominada **parâmetro**) pelas equações:

$$x = f(t), \quad y = g(t)$$

(chamadas **equações paramétricas**). Cada valor de t determina um ponto (x, y), que podemos marcar em um plano coordenado. Quando t varia, o ponto $(x, y) = (f(t), g(t))$ varia e traça uma curva C, que chamamos de **curva parametrizada**.



Se nenhuma restrição for colocada sobre o parâmetro t, podemos assumir que $t \in \mathbb{R}$. De forma geral, a curva com equações paramétricas

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad a \leq t \leq b$$

tem **ponto inicial** $(f(a), g(a))$ e **ponto final** $(f(b), g(b))$.

Exemplos:

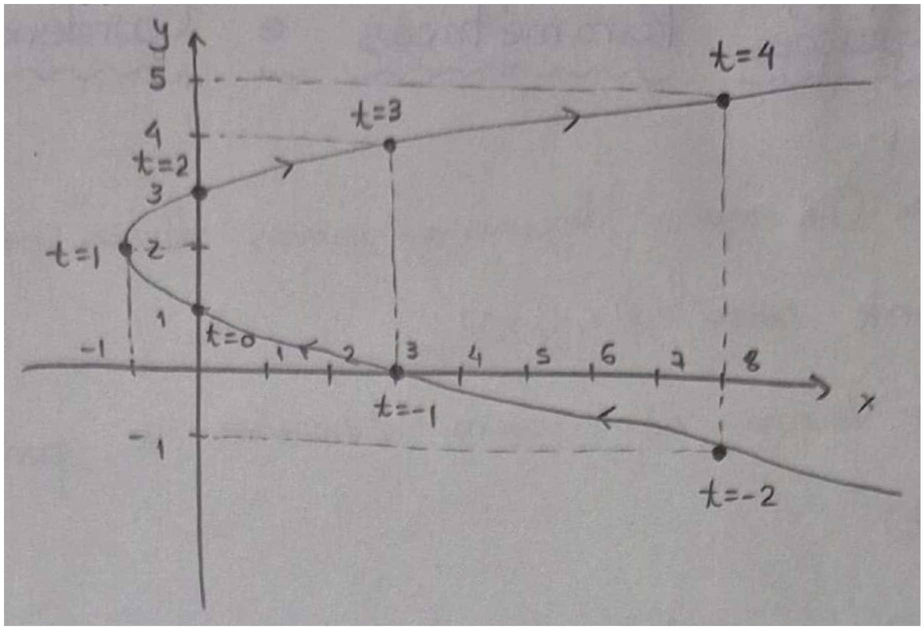
1) Esboce e identifique a curva definida pelas equações paramétricas:

$$x = t^2 - 2t, \quad y = t + 1$$

Dica: Tente sempre encontrar uma relação entre x e y, eliminando o parâmetro.

Vejamos alguns pontos da curva, atribuindo valores a t:

t	x	y
-2	8	-1
-1	3	0
0	0	1
1	-1	2
2	0	3
3	3	4
4	8	5



Parece que a curva traçada pode ser uma parábola. Isso pode ser verificado eliminando o parâmetro t:

Da segunda equação, temos:

$$t = y - 1$$

Substituindo na primeira equação:

$$x = (y-1)^2 - 2(y-1) = (y^2 - 2y + 1) - (2y - 2) = y^2 - 4y + 3$$

Assim, a curva representada pelas equações paramétricas dadas é a parábola:

$$x = y^2 - 4y + 3$$

$\rightarrow$ A equação em x e y nos descreve **onde** a partícula estava, mas não **quando** ela estava em um ponto específico. As equações paramétricas tem essa vantagem: elas nos dizem quando a partícula estava em determinado ponto, além de indicar a **direção** do movimento.

2) Que curva é representada pelas seguintes equações paramétricas?

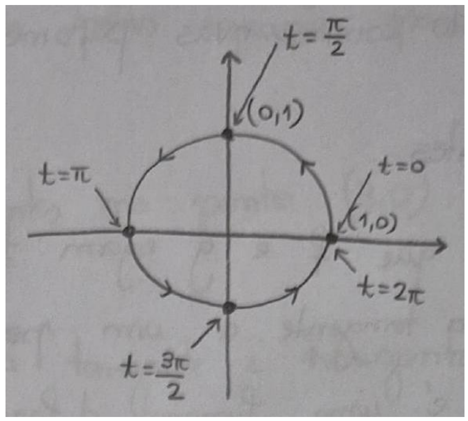
a) $x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$

b) $x = \operatorname{sen} 2t, \quad y = \cos 2t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$

Solução de (a):

Marcando alguns pontos:

t	x	y
0	1	0
$\pi/2$	0	1
π	-1	0
$3\pi/2$	0	-1
2π	1	0



Neste caso, não conseguimos isolar t facilmente. Porém, note que:

$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$$

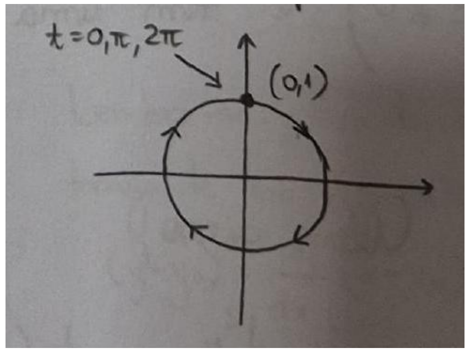
Então, o ponto (x, y) se move na circunferência unitária $x^2 + y^2 = 1$. Quando t aumenta de 0 a 2π, o ponto $(x, y) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ se move **uma vez** em torno da circunferência, no sentido anti-horário, partindo e chegando no ponto $(1, 0)$.

Solução de (b):

Temos:

$$x^2 + y^2 = \operatorname{sen}^2 2t + \cos^2 2t = 1$$

de modo que as equações paramétricas também representam a circunferência $x^2 + y^2 = 1$. Mas, quando t varia de 0 a 2π, o ponto $(x, y) = (\operatorname{sen} 2t, \cos 2t)$ começa em $(0, 1)$ e se move **duas vezes** em torno da circunferência, no **sentido horário**.



Observação: No exemplo anterior, podemos observar que diferentes equações paramétricas podem representar a mesma curva. O que muda é a maneira como a curva é percorrida (ponto inicial, sentido e velocidade).

2. Cálculo com curvas parametrizadas

Tangentes

Suponha que f e g sejam funções diferenciáveis e que queremos encontrar a reta tangente a um ponto da curva $x = f(t)$, $y = g(t)$, onde y também é uma função diferenciável de x.

Pela Regra da Cadeia:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

Assim, se $\frac{dx}{dt} \neq 0$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

Essa equação nos permite encontrar a inclinação $\frac{dy}{dx}$ da tangente a uma curva paramétrica sem ter que eliminar o parâmetro t.

A curva tem uma **tangente horizontal** quando $\frac{dy}{dt} = 0$ (desde que $\frac{dx}{dt} \neq 0$) e tem uma **tangente vertical** quando $\frac{dx}{dt} = 0$ (desde que $\frac{dy}{dt} \neq 0$).

Além disso, a segunda derivada é dada por:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}$$

Atenção: $\frac{d^2y}{dx^2} \neq \frac{d^2y/dt^2}{d^2x/dt^2}$

Exemplo: Uma curva C é definida pelas equações paramétricas $x = t^2$ e $y = t^3 - 3t$.

a) Verifique que C tem duas tangentes no ponto $(3, 0)$ e encontre suas equações.

b) Encontre os pontos de C onde a tangente é horizontal ou vertical.

c) Determine onde a curva é côncava para cima ou para baixo.

d) Esboce a curva.

Solução:

a) Observe que o ponto $(3, 0)$ ocorre quando:

$$y = 0 \Leftrightarrow t^3 - 3t = 0 \Leftrightarrow t(t^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \text{ ou } t = \pm\sqrt{3}$$

e

$$x = 3 \Leftrightarrow t^2 = 3 \Leftrightarrow t = \pm\sqrt{3}$$

Logo, o ponto $(3, 0)$ em C surge de dois valores do parâmetro, $t = \sqrt{3}$ e $t = -\sqrt{3}$. Isso indica que C se auto-intercepta em $(3, 0)$.

Além disso, a derivada $\frac{dy}{dx}$ é:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{3t^2 - 3}{2t} = \frac{3}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)$$

Para $t = \sqrt{3}$, a inclinação é $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\sqrt{3}} = \frac{3(3)-3}{2\sqrt{3}} = \frac{6}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

Para $t = -\sqrt{3}$, a inclinação é $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=-\sqrt{3}} = \frac{3(3)-3}{-2\sqrt{3}} = \frac{6}{-2\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$.

Lembre-se: a equação da reta tangente em (x_0, y_0) *é* $y - y_0 = \frac{dy}{dx} \cdot (x - x_0)$.

Logo, as equações das retas tangentes em $(3, 0)$ são:

$$y = \sqrt{3}(x - 3) \quad \text{e} \quad y = -\sqrt{3}(x - 3)$$

b) A tangente é horizontal quando $\frac{dy}{dt} = 0$ e $\frac{dx}{dt} \neq 0$. Temos

$$\frac{dy}{dt} = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow t^2 = 1 \Leftrightarrow t = \pm 1$$

Logo, os pontos de C onde a tangente é horizontal são $(x(1), y(1)) = (1, -2)$ e $(x(-1), y(-1)) = (1, 2)$.

A tangente é vertical quando $\frac{dx}{dt} = 0$ e $\frac{dy}{dt} \neq 0$. Temos

$$\frac{dx}{dt} = 0 \Leftrightarrow 2t = 0 \Leftrightarrow t = 0$$

Logo, o ponto de C onde a tangente é vertical é $(x(0), y(0)) = (0, 0)$.

c) Para determinar a concavidade, calculamos a segunda derivada:

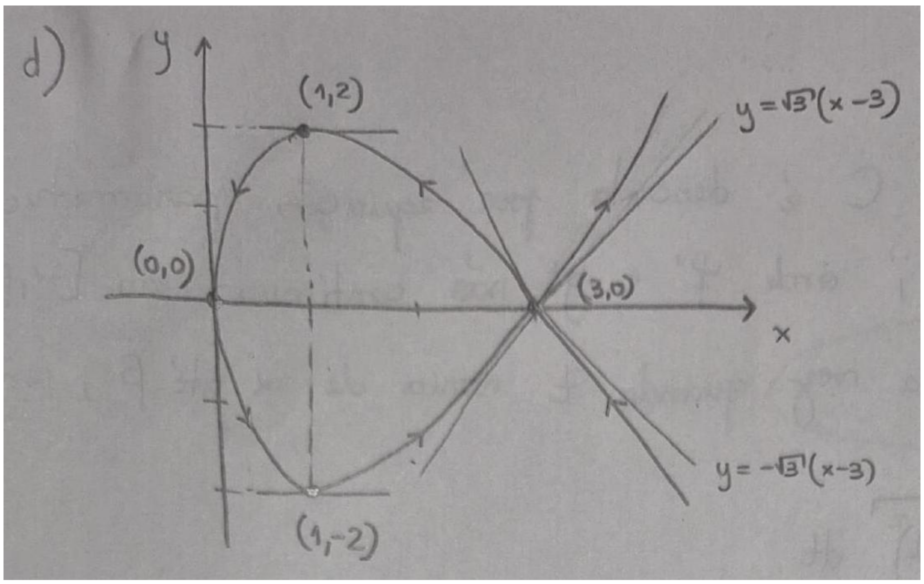
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{3}{2}(t - \frac{1}{t})\right)}{2t} = \frac{\frac{3}{2}(1 + \frac{1}{t^2})}{2t} = \frac{3(t^2+1)/t^2}{4t} = \frac{3(t^2+1)}{4t^3}$$

Como $t^2 + 1 > 0$ para todo t, o sinal de $\frac{d^2y}{dx^2}$ é o mesmo que o sinal de t^3.

$\frac{d^2y}{dx^2} > 0 \Leftrightarrow 4t^3 > 0 \Leftrightarrow t > 0$ (côncava para cima).

$\frac{d^2y}{dx^2} < 0 \Leftrightarrow 4t^3 \Leftrightarrow t < 0$ (côncava para baixo).

d) Esboço da curva:



Áreas

A área sob uma curva parametrizada C dada por $x = f(t)$, $y = g(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, com $y \geq 0$, é calculada por:

$$A = \int_a^b y\, dx = \int_\alpha^\beta g(t)f'(t)dt$$

(Onde $a = f(\alpha)$ e $b = f(\beta)$. A ordem dos limites de integração pode precisar de ajuste dependendo da orientação da curva.)

Exemplo: Encontre a área sob um arco da **cicloide** de raio r, dada por:

$$x = r(\theta - \operatorname{sen}\theta), \quad y = r(1 - \cos\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Note que $\frac{dx}{d\theta} = r(1 - \cos\theta)$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Então a área é:

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^{2\pi} r(1-\cos\theta)\cdot r(1-\cos\theta)d\theta = r^2\int_0^{2\pi}(1-\cos\theta)^2 d\theta \\
&= r^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta = r^2\int_0^{2\pi}\left[1-2\cos\theta+\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\right]d\theta \\
&= r^2\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}-2\cos\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)d\theta \\
&= r^2\left[\frac{3}{2}\theta-2\,\mathrm{sen}\,\theta+\frac{1}{4}\,\mathrm{sen}\,2\theta\right]_0^{2\pi} = r^2\left(\frac{3}{2}\cdot 2\pi\right) = 3\pi r^2
\end{aligned}
$$

Comprimento de Arco

Teorema: Se uma curva C é descrita pelas equações paramétricas $x = f(t), y = g(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, onde f' e g' são contínuas em $[\alpha, \beta]$ e C é percorrida exatamente uma vez quando t varia de α até β, então o comprimento de C é:

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

Exemplo: Calcule o comprimento da circunferência de raio 1.
Já vimos que a circunferência unitária pode ser parametrizada por:

$$x = \cos t, \quad y = \mathrm{sen}\, t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

e que, com essa parametrização, ela é percorrida exatamente uma vez.

Note que
$$\frac{dx}{dt} = -\,\mathrm{sen}\, t \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dt} = \cos t.$$

Logo, o comprimento é dado por:

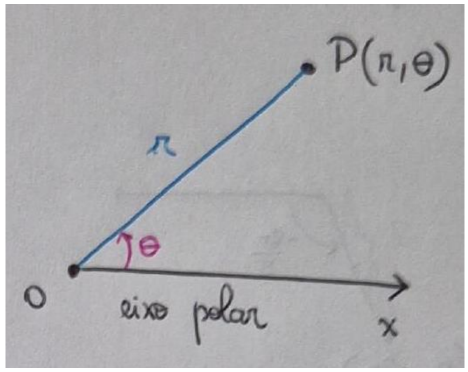
$$L = \int_0^{2\pi}\sqrt{(-\,\mathrm{sen}\, t)^2 + (\cos t)^2}dt = \int_0^{2\pi}\sqrt{\mathrm{sen}^2\, t + \cos^2 t}dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi$$

Observação: Se usássemos a parametrização $x = \mathrm{sen}\, 2t, y = \cos 2t$, teríamos que restringir t a $0 \leq t \leq \pi$ para obter o comprimento de uma volta. Caso contrário, com $0 \leq t \leq 2\pi$, a curva seria percorrida duas vezes, resultando no dobro do comprimento.

3. Coordenadas Polares

Escolhemos um ponto no plano chamado **polo** (ou origem), representado por O. Em seguida, desenhamos uma semirreta começando em O, chamada **eixo polar**. Esse eixo é geralmente desenhado horizontalmente para a direita e corresponde ao eixo x positivo nas coordenadas cartesianas.

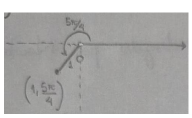
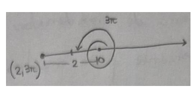
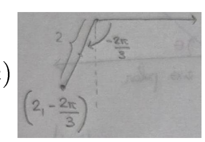
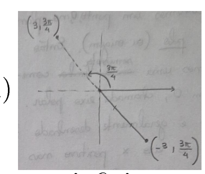
Se P for qualquer outro ponto do plano, seja r a distância de O até P e seja θ o ângulo (em radianos) entre o eixo polar e o segmento $\overline{OP}$. Assim, o ponto P é representado pelo par ordenado (r, θ), e r, θ são chamados de **coordenadas polares** de P.



Convenções:

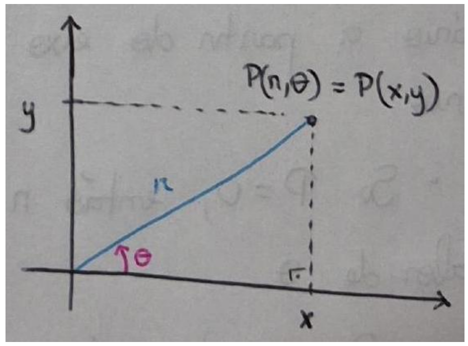
- Um ângulo é **positivo** se for medido no sentido anti-horário a partir do eixo polar e **negativo** se for medido no sentido horário.
- Se $P = O$, então $r = 0$, e $(0, \theta)$ representa o polo para qualquer valor de θ.
- Os pontos $(-r, \theta)$ e (r, θ) estão na mesma reta passando por O e à mesma distância $|r|$ de O, mas em lados opostos. Observe que $(-r, \theta)$ representa o mesmo ponto que $(r, \theta + \pi)$.

Exemplo: Marque os pontos cujas coordenadas polares são dadas:
(a) $\left(1, \frac{5\pi}{4}\right)$ **(b)** $(2, 3\pi)$ **(c)** $\left(2, -\frac{2\pi}{3}\right)$ **(d)** $\left(-3, \frac{3\pi}{4}\right)$

(a)  (b)  (c)  (d) 

Observação: No sistema de coordenadas polares, cada ponto tem infinitas representações. Por exemplo, $(1, 5\pi/4)$ pode ser representado por $(1, -3\pi/4)$ ou $(-1, \pi/4)$.

A relação entre as coordenadas polares e cartesianas de um ponto P pode ser vista na figura a seguir.



Se P tem coordenadas cartesianas (x, y) e coordenadas polares (r, θ), então, a partir do triângulo retângulo, temos:

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r}$$

e também

$$x = r\cos\theta \quad \text{e} \quad y = r\operatorname{sen}\theta$$

Essas equações nos permitem encontrar as coordenadas cartesianas quando as polares são conhecidas. Para encontrarmos r e θ quando x e y são conhecidos, usamos:

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \text{e} \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}$$

Exemplos:

1) Converta o ponto $(2, \pi/3)$ de coordenadas polares para cartesianas.

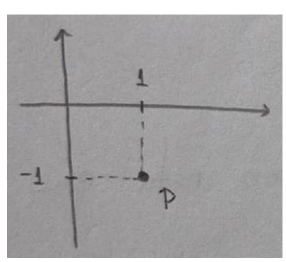
Como $r = 2$ e $\theta = \frac{\pi}{3}$, temos:

$$x = r\cos\theta = 2 \cdot \cos\frac{\pi}{3} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$y = r\operatorname{sen}\theta = 2 \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

Logo, as coordenadas cartesianas são $(1, \sqrt{3})$.

2) Represente o ponto com coordenadas cartesianas $(1, -1)$ em termos de coordenadas polares.



Se escolhermos $r > 0$, então:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x} = \frac{-1}{1} = -1$$

Como o ponto $(1, -1)$ está no $4^{\underline{o}}$ quadrante, podemos escolher $\theta = -\frac{\pi}{4}$ ou $\theta = \frac{7\pi}{4}$.

Então, uma resposta possível é $\left(\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right)$, e outra é $\left(\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4}\right)$.

Atenção: Embora $\operatorname{tg}(3\pi/4) = -1$, o ângulo $\theta = 3\pi/4$ está no $2^{\underline{o}}$ quadrante e, portanto, não serve para representar $(1, -1)$ com $r > 0$. Sendo assim, saber o quadrante do ponto é fundamental!

Curvas Polares

O **gráfico de uma equação polar** $r = f(\theta)$, ou mais genericamente $F(r, \theta) = 0$, consiste em todos os pontos P que têm pelo menos uma representação polar (r, θ) cujas coordenadas satisfazem a equação.

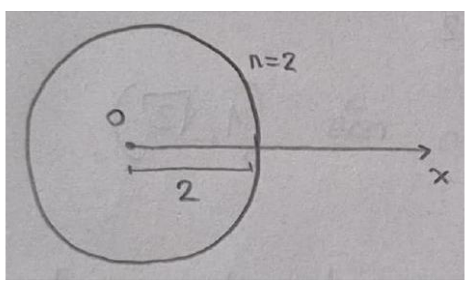
Exemplos:

1) Esboce as curvas polares de equações:

a) $r = 2$

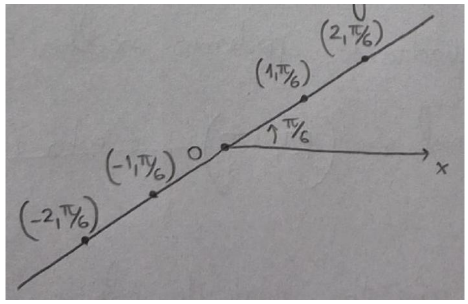
b) $\theta = \pi/6$

Solução de (a): A equação descreve os pontos (r, θ) com $r = 2$. Como r representa a distância do ponto à origem, a curva $r = 2$ é o círculo de centro O e raio 2.



Em geral, a equação $r = a$ representa um círculo com centro O e raio $|a|$.

Solução de (b): A equação descreve os pontos (r, θ) com $\theta = \frac{\pi}{6}$ rad. O conjunto de todos esses pontos é uma reta que passa pela origem O e forma um ângulo de $\frac{\pi}{6}$ radianos com o eixo polar.



2) Considere a curva com equação polar $r = 2\cos\theta$.

a) Encontre a equação cartesiana para essa curva.

b) Esboce a curva.

Solução de (a): Sabemos que $x = r\cos\theta$, então $\cos\theta = \frac{x}{r}$. Substituindo na equação polar:

$$r = 2\cos\theta \implies r = 2 \cdot \frac{x}{r} \implies r^2 = 2x$$

Como $r^2 = x^2 + y^2$, temos:

$$x^2 + y^2 = 2x \implies x^2 - 2x + y^2 = 0$$

Completando o quadrado para a variável x:

$$(x^2 - 2x + 1) + y^2 = 1 \implies (x-1)^2 + y^2 = 1$$

que é a equação do círculo com centro em $(1, 0)$ e raio 1.

Solução de (b): Esboço do círculo.