

4ª Lista de Exercícios
Cálculo Diferencial e Integra II - Curso: Engenharia Civil
Profª Liliam Carsava Merighe

Funções de várias variáveis reais a valores reais - Parte 2

Todos os exercícios da lista a seguir podem ser encontrados na seguinte referência:
STEWART, J. Cálculo, v.2. 7 ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

Exercício 1 Use a Regra da Cadeia para encontrar $\frac{dz}{dt}$ ou $\frac{dw}{dt}$.

a) $z = x^2 + y^2 + xy$, $x = \sin t$, $y = e^t$.

b) $z = \cos(x + 4y)$, $x = 5t^4$, $y = \frac{1}{t}$.

c) $w = x e^{y/z}$, $x = t^2$, $y = 1 - t$, $z = 1 + 2t$.

Exercício 2 Use a Regra da Cadeia para encontrar $\frac{\partial z}{\partial s}$ e $\frac{\partial z}{\partial t}$, onde $z = x^2 y^3$, $x = s \cos t$ e $y = s \sin t$.

Exercício 3 Utilize a Regra da Cadeia para determinar as derivadas parciais indicadas.

a) $z = x^2 + xy^3$, $x = uv^2 + w^3$, $y = u + v e^w$; $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial w}$ quando $u = 2$, $v = 1$, $w = 0$.

b) $w = xy + yz + zx$, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $z = r\theta$; $\frac{\partial w}{\partial r}$, $\frac{\partial w}{\partial \theta}$ quando $r = 2$, $\theta = \pi/2$.

Exercício 4 Utilize a equação da diferenciação implícita para determinar $\frac{dy}{dx}$, onde: $y \cos x = x^2 + y^2$.

Exercício 5 Utilize as equações da diferenciação implícita para determinar $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$, onde: $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$.

Exercício 6 A temperatura em um ponto (x, y) é $T(x, y)$, medida em graus Celsius. Um inseto rasteja, de modo que sua posição após t segundos é dada por $x = \sqrt{1+t}$, $y = 2 + \frac{1}{3}t$, onde x e y são medidos em centímetros. A função da temperatura satisfaz $\frac{\partial T}{\partial x}(2, 3) = 4$ e $\frac{\partial T}{\partial y}(2, 3) = 3$. Quão rápido a temperatura aumenta no caminho do inseto depois de três segundos?

Exercício 7 O raio de um cone circular reto está aumentando em uma taxa de 4,6cm/s enquanto sua altura está decrescendo em uma taxa de 6,5cm/s. Em qual taxa o volume do cone está variando quando o raio é 300cm e a altura é 350cm?

Lembre-se: o volume de um cone circular reto é dado por $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$, onde r é o raio da base e h a altura do cone.

Exercício 8 Se $z = f(x, y)$, onde $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$, determine $\frac{\partial z}{\partial r}$, $\frac{\partial z}{\partial \theta}$ e $\frac{\partial^2 z}{\partial r \partial \theta}$.

Exercício 9 Determine a derivada direcional de f no ponto dado e na direção indicada pelo ângulo θ .

a) $f(x, y) = x^3y^4 - x^4y^3, \quad (1, 1), \quad \theta = \frac{\pi}{6}.$

b) $f(x, y) = ye^{-x}, \quad (0, 4), \quad \theta = \frac{2\pi}{3}.$

Exercício 10 Para cada um dos itens a seguir, faça o que é pedido:

(i) Determine o gradiente de f .

(ii) Calcule o gradiente no ponto P .

(iii) Determine a taxa de variação de f em P na direção do vetor \vec{u} .

a) $f(x, y) = \sin(2x + 3y), \quad P(-6, 4), \quad \vec{u} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\vec{i} - \vec{j}).$

b) $f(x, y, z) = xe^{2yz}, \quad P(3, 0, 2), \quad \vec{u} = \left\langle \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right\rangle.$

Exercício 11 Determine a derivada direcional da função no ponto dado e na direção do vetor \vec{v} .

a) $f(x, y) = e^x \operatorname{sen} y, \quad (0, \pi/3), \quad \vec{v} = \langle -6, 8 \rangle.$

b) $f(x, y) = x^4 - x^2y^3, \quad (2, 1), \quad \vec{v} = \langle 1, 3 \rangle.$

c) $f(x, y, z) = \sqrt{xyz}, \quad (3, 2, 6), \quad \vec{v} = \langle -1, -2, 2 \rangle.$

Exercício 12 Determine a taxa de variação máxima de f no ponto dado e a direção em que isso ocorre.

a) $f(x, y) = 4y\sqrt{x}, \quad (4, 1).$

b) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (3, 6, -2).$

Exercício 13 Suponha que em uma certa região do espaço o potencial elétrico V seja dado por $V(x, y, z) = 5x^2 - 3xy + xyz$.

(a) Determine a taxa de variação do potencial em $P(3, 4, 5)$ na direção do vetor $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

(b) Em que direção V varia mais rapidamente em P ?

(c) Qual a taxa máxima de variação em P ?

Exercício 14 Encontre uma equação do plano tangente e da reta normal à superfície $2(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 10$ no ponto $(3, 3, 5)$.