

Funções de Várias Variáveis Reais a Valores Reais

1. Funções de várias variáveis

Funções de duas variáveis

Definição: Uma **função f de duas variáveis** é uma regra que associa a cada par ordenado de números reais (x, y) de um conjunto $D \subseteq \mathbb{R}^2$ um único valor real, denotado por $f(x, y)$.

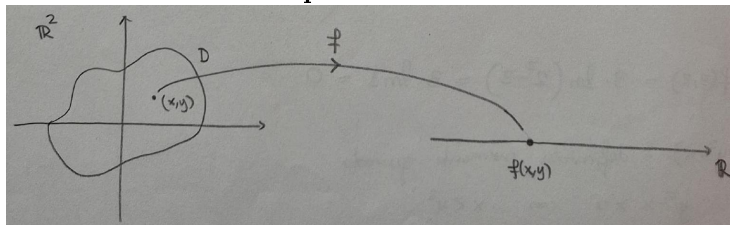
O conjunto D é o **domínio** de f e sua **imagem** é o conjunto de valores possíveis de f , ou seja,

$$\text{Im}f = \{f(x, y) \mid (x, y) \in D\}.$$

Notação:

$$\begin{aligned} f : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto f(x, y) \end{aligned}$$

Frequentemente escrevemos $z = f(x, y)$. As variáveis x e y são **variáveis independentes** e z é a **variável dependente**.



Exemplos:

1) Para cada uma das funções a seguir, calcule $f(3, 2)$, encontre o domínio e o represente graficamente.

a) $f(x, y) = \frac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$

b) $f(x, y) = x \ln(y^2 - x)$.

Solução:

a) • $f(3, 2) = \frac{\sqrt{3+2+1}}{3-1} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

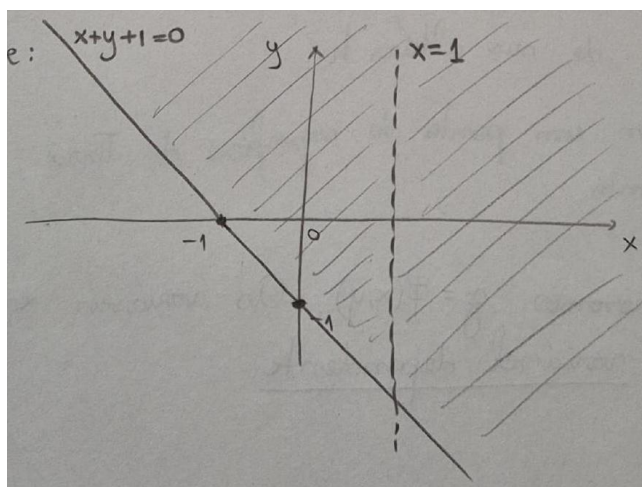
• A expressão para f está bem definida se

$$\begin{aligned} x+y+1 &\geq 0 & \text{e} & & x-1 &\neq 0 \\ y &\geq -x-1 & \text{e} & & x &\neq 1 \end{aligned}$$

Logo, o domínio de f é

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y+1 \geq 0 \text{ e } x \neq 1\}$$

Geometricamente:



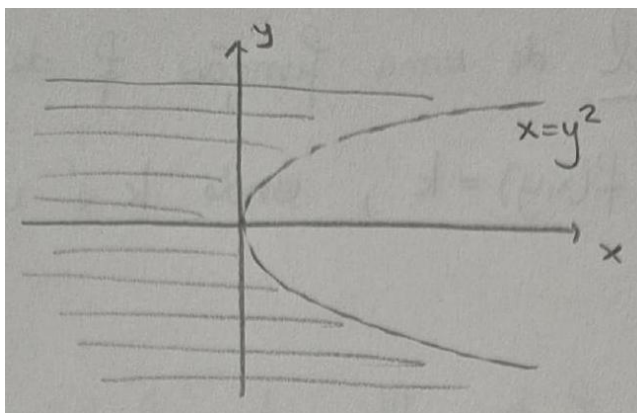
- b) • $f(3, 2) = 3 \cdot \ln(2^2 - 3) = 3 \cdot \ln 1 = 0$
 • $\ln(y^2 - x)$ é definido somente quando

$$y^2 - x > 0 \Leftrightarrow x < y^2$$

Logo, o domínio de f é

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y^2\}$$

Geometricamente:



2) Determine o domínio e a imagem de $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

Solução:

O domínio de g é

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 9 - x^2 - y^2 \geq 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 9\}$$

que é o disco de centro $(0, 0)$ e raio 3.

A imagem de g é

$$\{z \mid z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, (x, y) \in D\}$$

Note que $z \geq 0$ e, como $9 - x^2 - y^2 \leq 9$, temos $\sqrt{9 - x^2 - y^2} \leq 3$. Logo, a imagem é $\{z \mid 0 \leq z \leq 3\} = [0, 3]$.

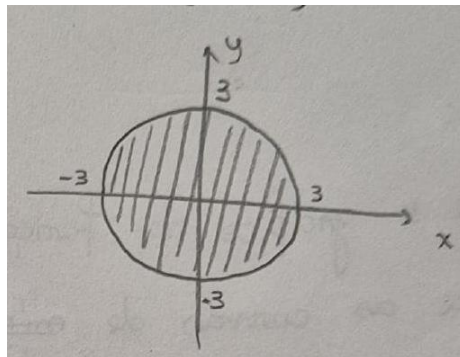


Gráfico e Curvas de Nível

Definição: Se f é uma função de duas variáveis com domínio D , então o **gráfico** de f é o conjunto de todos os pontos (x, y, z) em $\mathbb{R}^3$ tal que $z = f(x, y)$ e $(x, y) \in D$, isto é,

$$G_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y), \quad (x, y) \in D\}$$

Representar geometricamente o gráfico nem sempre é uma tarefa fácil. Daí surgiu a necessidade de estudar as curvas de nível da função, que são mais fáceis de representar.

Definição: As **curvas de nível** de uma função f de duas variáveis são aquelas com equação $f(x, y) = k$, onde k é uma constante (na imagem de f).

Exemplos:

- 1) **a)** Esboce o gráfico da função $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$.
- b)** Esboce as curvas de nível da função $f(x, y) = 6 - 3x - 2y$ para os valores $k = -6, 0, 6, 12$.

Solução:

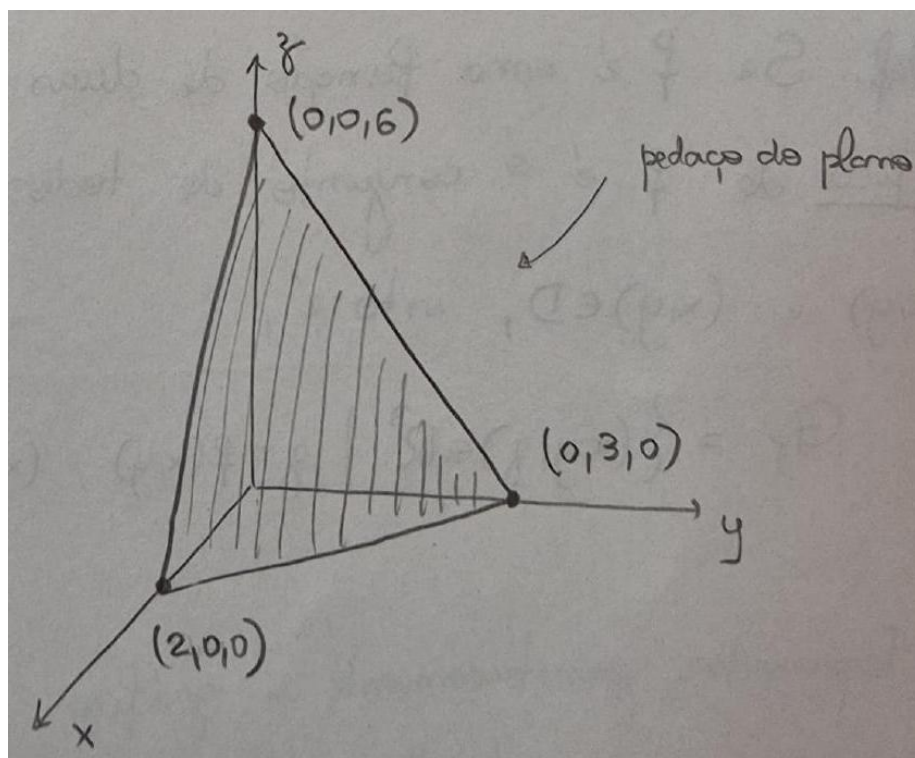
- a)** O gráfico de f tem equação

$$z = 6 - 3x - 2y \quad \Leftrightarrow \quad 3x + 2y + z = 6$$

que representa um plano.

Para desenhar o plano, primeiro achamos as interseções com os eixos:

- Eixo x ($y = 0, z = 0$): $3x = 6 \Rightarrow x = 2$. Ponto: $(2, 0, 0)$.
- Eixo y ($x = 0, z = 0$): $2y = 6 \Rightarrow y = 3$. Ponto: $(0, 3, 0)$.
- Eixo z ($x = 0, y = 0$): $z = 6$. Ponto: $(0, 0, 6)$.



b) As curvas de nível são

$$6 - 3x - 2y = k \Leftrightarrow 3x + 2y + (k - 6) = 0$$

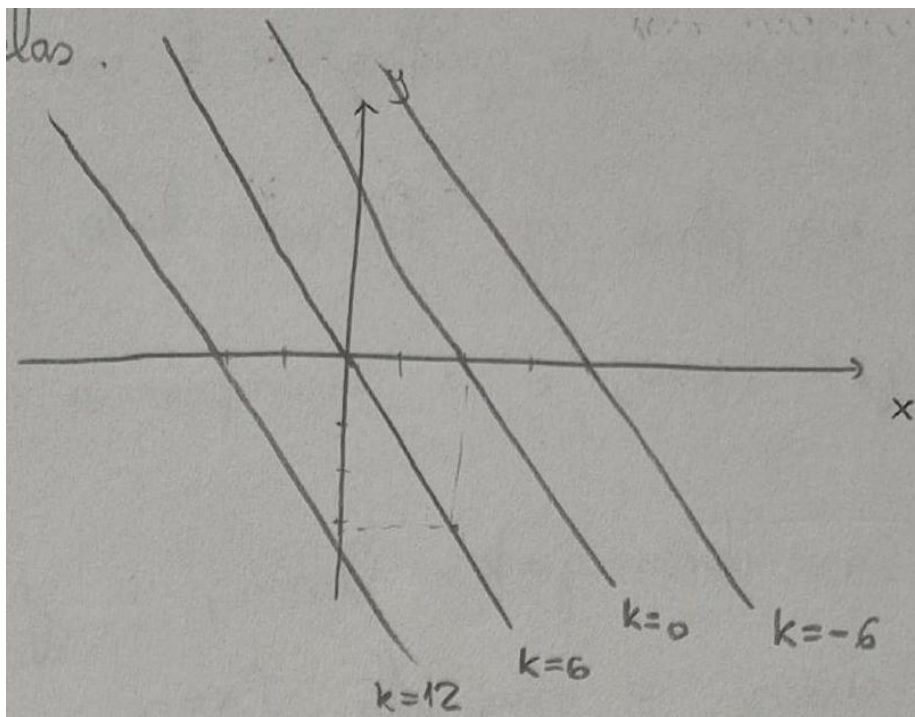
que é uma família de retas paralelas.

$$k = -6 : 3x + 2y - 12 = 0$$

$$k = 0 : 3x + 2y - 6 = 0$$

$$k = 6 : 3x + 2y = 0$$

$$k = 12 : 3x + 2y + 6 = 0$$



A função do exemplo anterior é um caso especial da função

$$f(x, y) = ax + by + c$$

e é chamada **função linear**. O gráfico de uma dessas funções tem a equação

$$z = ax + by + c \quad \text{ou} \quad ax + by - z + c = 0$$

e, portanto, é um plano.

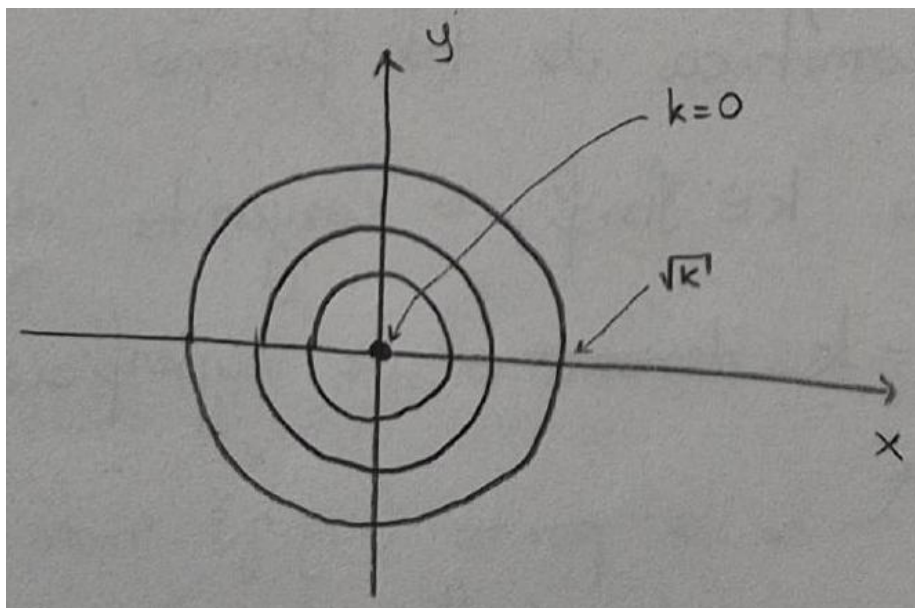
- 2) a) Desenhe as curvas de nível de $f(x, y) = x^2 + y^2$.
 b) Esboce o gráfico de $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Solução:

a) Note que $f(x, y) = x^2 + y^2 \geq 0$. Seja, então, $k \geq 0$. A curva de nível correspondente a $z = k$ é

$$x^2 + y^2 = k$$

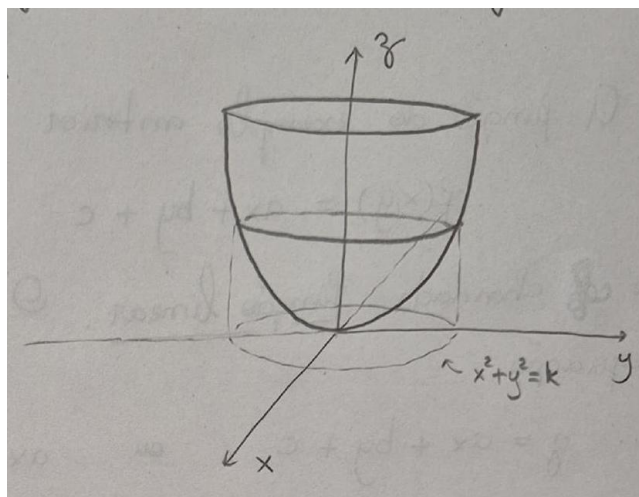
ou seja, são circunferências concêntricas de centro na origem e raio $\sqrt{k}$.



b) A interseção do gráfico de f com o plano $x = 0$ é a parábola $\begin{cases} x = 0 \\ z = y^2 \end{cases}$ localizada no plano yz . Por outro lado, a interseção do gráfico de f com o plano $z = k$ ($k > 0$) é a circunferência $\begin{cases} z = k \\ x^2 + y^2 = k \end{cases}$ de centro no eixo z e localizada no plano $z = k$. Assim, o gráfico de f é obtido girando, em torno do eixo z , a parábola $\begin{cases} x = 0 \\ z = y^2 \end{cases}$.

O gráfico de f é um parabolóide de rotação.

Observe que a curva de nível $f(x, y) = k$ nada mais é do que a projeção no plano xy da interseção do gráfico de f com o plano $z = k$.



Funções de três ou mais variáveis

Uma **função f de três variáveis** é uma regra que associa a cada tripla ordenada (x, y, z) em um domínio $D \subseteq \mathbb{R}^3$ um único número real $w = f(x, y, z)$.

O **gráfico** de tal função é o conjunto

$$G_f = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid w = f(x, y, z), \quad (x, y, z) \in D\}$$

Note: está em $\mathbb{R}^4$, logo, não é possível representar geometricamente.

Para se ter uma visão geométrica de tal função, podemos utilizar as suas **superfícies de nível**: seja $k \in \text{Im} f$, o conjunto de todos os pontos $(x, y, z) \in D$ tais que $f(x, y, z) = k$ denomina-se superfície de nível correspondente ao nível $w = k$.

Exemplo: Encontre as superfícies de nível da função

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Solução:

As superfícies de nível são

$$x^2 + y^2 + z^2 = k, \text{ onde } k \geq 0.$$

Elas formam uma família de esferas concêntricas com raio $\sqrt{k}$.

Uma **função com n variáveis** é uma regra que associa um número $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ a uma n -upla $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de números reais em um conjunto $D \subseteq \mathbb{R}^n$.

2. Limites e Continuidade

Limites

Vamos comparar o comportamento das funções

$$f(x, y) = \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \quad \text{e} \quad g(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

quando x e y se aproximam de 0 (e, portanto, o ponto (x, y) se aproxima da origem).

TABELA 1 Valores de $f(x, y)$

$x \backslash y$	-1,0	-0,5	-0,2	0	0,2	0,5	1,0
-1,0	0,455	0,759	0,829	0,841	0,829	0,759	0,455
-0,5	0,759	0,959	0,986	0,990	0,986	0,959	0,759
-0,2	0,829	0,986	0,999	1,000	0,999	0,986	0,829
0	0,841	0,990	1,000		1,000	0,990	0,841
0,2	0,829	0,986	0,999	1,000	0,999	0,986	0,829
0,5	0,759	0,959	0,986	0,990	0,986	0,959	0,759
1,0	0,455	0,759	0,829	0,841	0,829	0,759	0,455

TABELA 2 Valores de $g(x, y)$

$x \backslash y$	-1,0	-0,5	-0,2	0	0,2	0,5	1,0
-1,0	0,000	0,600	0,923	1,000	0,923	0,600	0,000
-0,5	-0,600	0,000	0,724	1,000	0,724	0,000	-0,600
-0,2	-0,923	-0,724	0,000	1,000	0,000	-0,724	-0,923
0	-1,000	-1,000	-1,000		-1,000	-1,000	-1,000
0,2	-0,923	-0,724	0,000	1,000	0,000	-0,724	-0,923
0,5	-0,600	0,000	0,724	1,000	0,724	0,000	-0,600
1,0	0,000	0,600	0,923	1,000	0,923	0,600	0,000

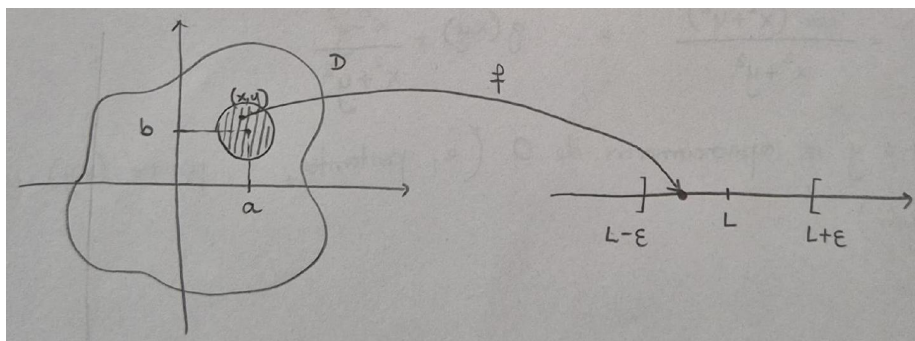
Parece que, quando (x, y) se aproxima de $(0, 0)$, os valores de $f(x, y)$ se aproximam de 1, ao passo que os valores de $g(x, y)$ não se aproximam de valor algum. Podemos escrever:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \text{ não existe}$$

Vejam a definição mais precisa:

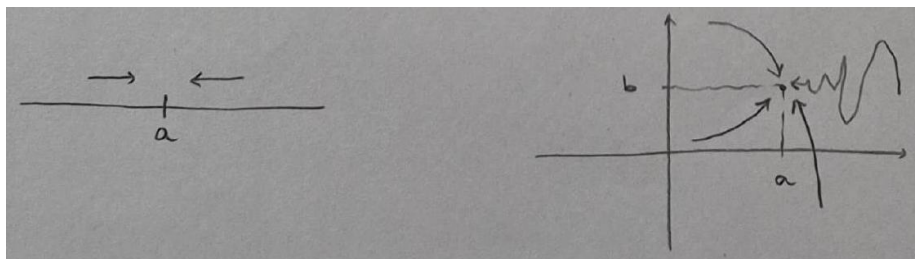
Definição: Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função cujo domínio D contém pontos arbitrariamente próximos de (a, b) . Dizemos que o limite de $f(x, y)$ quando (x, y) tende a (a, b) é L e escrevemos

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = L \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que, para todo } (x, y) \in D, \\ 0 < \underbrace{\|(x, y) - (a, b)\|}_{0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta} < \delta \Rightarrow |f(x, y) - L| < \varepsilon \end{cases}$$



Note:

→ Para as funções de uma única variável, quando fazemos $x \rightarrow a$, só existem duas direções possíveis de aproximação: à direita e à esquerda. Já para as funções de duas variáveis essa situação não é tão simples, porque existem infinitos caminhos para (x, y) se aproximar de (a, b) .



→ A definição de limite refere-se somente à distância entre (x, y) e (a, b) e não à direção de abordagem. Logo, se o limite existe, $f(x, y)$ deve se aproximar do mesmo valor L , independente do modo como (x, y) se aproxima de (a, b) .

Teorema: Se $f(x, y) \rightarrow L_1$ quando $(x, y) \rightarrow (a, b)$ ao longo do caminho C_1 e $f(x, y) \rightarrow L_2$ quando $(x, y) \rightarrow (a, b)$ ao longo do caminho C_2 , com $L_1 \neq L_2$, então $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y)$ não existe.

Exemplos:

- 1) Se $f(x, y) = k$ é uma função constante, então,

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} k = k, \quad \forall (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$$

De fato, note que $|f(x, y) - k| = |k - k| = 0$; assim, dado $\varepsilon > 0$ e tomando-se um $\delta > 0$ qualquer,

$$0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta \Rightarrow 0 = |f(x, y) - k| < \varepsilon.$$

logo,

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} k = k.$$

- 2) Se $f(x, y) = x$, então

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} x = x_0, \quad \forall (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2.$$

De fato, note que, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$|x - x_0| \leq \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \|(x, y) - (x_0, y_0)\|.$$

Então, dado $\varepsilon > 0$, tome $\delta = \varepsilon$ e teremos

$$0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta = \varepsilon \Rightarrow |x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow |f(x, y) - x_0| < \varepsilon$$

Logo,

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} x = x_0.$$

- 3) Mostre que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ não existe.

Seja $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$. Vejamos como se comportam os valores de $f(x, y)$ para (x, y) próximo de $(0, 0)$.

- Sobre o eixo x : temos $y = 0$ e $f(x, 0) = \frac{x^2}{x^2} = 1$, para $x \neq 0$. Logo, $f(x, y) \rightarrow 1$ quando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ao longo do eixo x .
- Sobre o eixo y : temos $x = 0$ e $f(0, y) = \frac{-y^2}{y^2} = -1$, para $y \neq 0$. Logo, $f(x, y) \rightarrow -1$ quando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ao longo do eixo y .

Como f tem dois limites diferentes ao longo de duas retas diferentes, o limite não existe.

- 4) Se $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$, será que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ existe?

- Se $y = 0$, então $f(x, 0) = \frac{0}{x^2} = 0$. Logo, $f(x, y) \rightarrow 0$ quando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ao longo do eixo x .
- Se $x = 0$, então $f(0, y) = \frac{0}{y^2} = 0$. Logo, $f(x, y) \rightarrow 0$ quando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ao longo do eixo y .

Apesar de termos encontrado valores idênticos ao longo dos eixos, não podemos afirmar que o limite existe e seja 0.

Considere outra reta passando pela origem: $y = x$, por exemplo. Temos $f(x, x) = \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2}$, $\forall x \neq 0$. Logo, $f(x, y) \rightarrow \frac{1}{2}$ quando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ao longo de $y = x$.

Como $0 \neq \frac{1}{2}$, podemos afirmar que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ não existe.

Observação: A curva considerada não necessariamente precisa ser uma reta! Por isso, garantir a existência do limite nem sempre é fácil.

Propriedades:

1. Se $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = L_1$ e $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} g(x, y) = L_2$, então

- (a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} [f(x, y) + g(x, y)] = L_1 + L_2$.
- (b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} k \cdot f(x, y) = k \cdot L_1$, onde k é uma constante.
- (c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} [f(x, y) \cdot g(x, y)] = L_1 \cdot L_2$.
- (d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{f(x, y)}{g(x, y)} = \frac{L_1}{L_2}$, desde que $L_2 \neq 0$.

- 2. (Teorema da Conservação do Sinal)** Se $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L, L > 0$, então existirá $\delta > 0$ tal que, para todo $(x,y) \in D_f$,

$$0 < \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \delta \Rightarrow f(x,y) > 0$$

(Análogo para $L < 0$ e $f(x,y) < 0$)

- 3. (Teorema do Confronto)** Se $f(x,y) \leq g(x,y) \leq h(x,y)$ para $0 < \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < r$ e se

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} h(x,y)$$

então

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x,y) = L$$

- 4.** Se $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = 0$ e se $|g(x,y)| \leq M$ para $0 < \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < r$, onde $r > 0$ e $M > 0$ são reais fixos, então

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) \cdot g(x,y) = 0$$

- 5.** $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} |f(x,y)| = 0$.

- 6.** $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L \Leftrightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} [f(x,y) - L] = 0$.

- 7.** $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L \Leftrightarrow \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} f(x_0 + h, y_0 + k) = L$.

Exemplo:

- 5)** Calcule, caso exista, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2}$.

Solução: Note que

$$\frac{x^3}{x^2 + y^2} = x \cdot \frac{x^2}{x^2 + y^2}$$

e $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x = 0$ e $\left| \frac{x^2}{x^2 + y^2} \right| \leq 1$ para todo $(x,y) \neq (0,0)$. Assim, pela propriedade 4,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \cdot \left(\frac{x^2}{x^2 + y^2} \right) = 0$$

Continuidade

Definição: Seja f uma função de duas variáveis e $(x_0, y_0) \in D_f$. Definimos:

$$f \text{ é contínua em } (x_0, y_0) \Leftrightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0).$$

Diremos, simplesmente, que f é contínua se for contínua em todos os pontos de seu domínio.

Usando as propriedades de limites, podemos ver que soma, diferença, produto e quociente de funções contínuas são contínuas em seus domínios.

Exemplos:

- 1) A função constante $f(x, y) = k$ é contínua.

$$\text{Pois } \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = k = f(x_0, y_0), \quad \forall (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2.$$

- 2) A função $f(x, y) = x$ é contínua.

$$\text{Pois } \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = x_0 = f(x_0, y_0), \quad \forall (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2.$$

- 3) Todos os polinômios de duas variáveis (soma de termos da forma $cx^m y^n$, c constante e $m, n \in \mathbb{N}$) são funções contínuas em $\mathbb{R}^2$. Da mesma forma, qualquer função racional (razão de polinômios) é contínua em seu domínio.

- 4) Calcule $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} (x^2 y^3 - x^3 y^2 + 3x + 2y)$.

A função $f(x, y) = x^2 y^3 - x^3 y^2 + 3x + 2y$ é um polinômio, logo, é contínua.

Temos então

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} (x^2 y^3 - x^3 y^2 + 3x + 2y) = 1^2 \cdot 2^3 - 1^3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 8 - 4 + 3 + 4 = 11$$

- 5) Seja

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & , \text{ se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{ se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Temos que f não é contínua em $(0, 0)$, pois $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ não existe

(Exemplo 3 da seção anterior). Porém, f é contínua em todos os pontos

$(x, y) \neq (0, 0)$, pois é uma função racional com domínio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$.

- 6) Seja

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} & , \text{ se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{ se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Temos que g é contínua para $(x, y) \neq (0, 0)$, uma vez que ela é uma função racional definida nessa região. Além disso,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y) = 0 = g(0, 0).$$

(A primeira igualdade segue do Exemplo 5 da seção anterior).

Portanto, g é contínua em $(0, 0)$ e, conseqüentemente, em $\mathbb{R}^2$.

Teorema: Sejam $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : B \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções tais que $\text{Im } f \subset D_g$. Se f for contínua em (x_0, y_0) e g for contínua em $f(x_0, y_0)$, então a composta $h(x, y) = g(f(x, y))$ será contínua em (x_0, y_0) .

Exemplo:

7) Sendo $f(x, y)$ contínua, as compostas $\sin(f(x, y))$, $\cos(f(x, y))$, $e^{f(x, y)}$, etc... também serão.

Observação: Tudo o que foi feito vale para 3 ou mais variáveis também!

3. Derivadas Parciais

Seja $z = f(x, y)$ uma função real de duas variáveis reais e seja $(x_0, y_0) \in D_f$. Fixado y_0 , podemos considerar a função g de uma variável dada por $g(x) = f(x, y_0)$. Se g tem derivada em x_0 , nós a chamaremos de **derivada parcial de f em relação a x em (x_0, y_0)** e a denotaremos por $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$. Assim

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = g'(x_0) \text{ onde } g(x) = f(x, y_0).$$

Da definição de derivada,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Da mesma forma, a **derivada parcial de f em relação a y em (x_0, y_0)** , denotada por $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, é obtida mantendo-se x fixo ($x = x_0$) e determinando-se a derivada em y_0 da função $G(y) = f(x_0, y)$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Se deixarmos o ponto (x_0, y_0) variar nas equações anteriores, $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ se tornam funções de duas variáveis, chamadas **derivadas parciais**, definidas por

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h} \end{aligned}$$

Notações:

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f_x(x, y) = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = f_1 = D_1 f = D_x f$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f_y(x, y) = f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} = f_2 = D_2 f = D_y f$

Exemplos:

1) Seja $f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$. Calcule:

a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ b) $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ c) $\frac{\partial f}{\partial x}(2, 1)$ d) $\frac{\partial f}{\partial y}(2, 1)$

Solução:

a) Mantendo y constante e derivando em relação a x , obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + 2xy^3.$$

b) Mantendo x constante e derivando em relação a y , obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x^2y^2 - 4y.$$

c) Do item (a),

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2, 1) = 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 1^3 = 16.$$

d) Do item (b),

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2, 1) = 3 \cdot 2^2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 = 8.$$

2) Se $f(x, y) = \sin\left(\frac{x}{1+y}\right)$, calcule $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Solução:

Usando a Regra da Cadeia para funções de uma variável, temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{1+y}\right) = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \cdot \frac{1}{1+y} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{1+y}\right) = \cos\left(\frac{x}{1+y}\right) \cdot \frac{-x}{(1+y)^2}\end{aligned}$$

3) Determine $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$ se z é definido implicitamente como uma função de x e y pela equação

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$$

Solução:

Derivando ambos os lados em relação a x , tomando o cuidado de tratar y como constante, temos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz) &= \frac{\partial}{\partial x}(1) \\ \Rightarrow 3x^2 + 3z^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \underbrace{6yz + 6xy \frac{\partial z}{\partial x}}_{\text{Regra do Produto}} &= 0 \\ \Rightarrow (3z^2 + 6xy) \cdot \frac{\partial z}{\partial x} &= -3x^2 - 6yz \\ \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{3(x^2 + 2yz)}{3(z^2 + 2xy)} = -\frac{x^2 + 2yz}{z^2 + 2xy}\end{aligned}$$

De modo análogo, derivando ambos os lados em relação a y :

$$3y^2 + 3z^2 \frac{\partial z}{\partial y} + 6xz + 6xy \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{3(y^2 + 2xz)}{3(z^2 + 2xy)} = -\frac{y^2 + 2xz}{z^2 + 2xy}$$

4) Seja $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. Determine $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Solução:

• $\frac{\partial f}{\partial x}$:

Nos pontos $(x, y) \neq (0, 0)$ podemos aplicar a regra do quociente:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3x^2(x^2 + y^2) - (x^3 - y^2)(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{3x^4 + 3x^2y^2 - 2x^4 + 2xy^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^4 + 3x^2y^2 + 2xy^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Em $(0, 0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \text{ é a derivada, em } x = 0, \text{ de } g(x) = f(x, 0) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2} = x, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}.$$

Assim, $g(x) = f(x, 0) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$; segue que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = g'(0) = 1$$

Poderíamos ter calculado $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ por limite:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3/h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1.$$

Logo,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 + 3x^2y^2 + 2xy^2}{(x^2 + y^2)^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

• $\frac{\partial f}{\partial y}$:

Para $(x, y) \neq (0, 0)$, temos

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2y(x^2 + y^2) - (x^3 - y^2)(2y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-2yx^2 - 2y^3 - 2yx^3 + 2y^3}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{2yx^2(1 + x)}{(x^2 + y^2)^2}$$

Em $(0, 0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \text{ é (caso exista) a derivada, em } y = 0, \text{ de } h(y) = f(0, y) = \begin{cases} \frac{-y^2}{y^2} = -1, & \text{se } y \neq 0 \\ 0, & \text{se } y = 0 \end{cases}.$$

Note que $h(y)$ não é contínua em $y = 0$, logo $h'(0)$ não existe. Ou seja, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ não existe.

Logo,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{2yx^2(1+x)}{(x^2+y^2)^2}, \text{ para } (x, y) \neq (0, 0).$$

Observação: As derivadas parciais também podem ser definidas de forma análoga para funções de três ou mais variáveis.

Derivadas de ordem superior

Se f é uma função de duas variáveis, suas derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são funções de duas variáveis, de modo que podemos considerar novamente suas derivadas parciais, chamadas **derivadas parciais de segunda ordem de f** . Se $z = f(x, y)$, usamos as seguintes notações:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (f_x)_x = f_{xx} = f_{11} \\ \bullet \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = (f_x)_y = f_{xy} = f_{12} \\ \bullet \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (f_y)_x = f_{yx} = f_{21} \\ \bullet \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (f_y)_y = f_{yy} = f_{22} \end{aligned}$$

Exemplo: Determine as derivadas parciais de segunda ordem de

$$f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$$

Solução:

Já vimos (no Exemplo 1 anterior) que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 2xy^3 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2 - 4y$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} (3x^2 + 2xy^3) = 6x + 2y^3 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} (3x^2 + 2xy^3) = 6xy^2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} (3x^2y^2 - 4y) = 6xy^2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} (3x^2y^2 - 4y) = 6x^2y - 4 \end{aligned}$$

Note: nesse exemplo, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. Mas será que isso vale sempre?

Teorema de Clairaut: Suponha que f seja definida em uma bola aberta D que contenha o ponto (a, b) . Se as funções $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ forem ambas contínuas em D , então $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b)$.

Observação: Derivadas parciais de ordem 3 ou maior também podem ser definidas.

4. Planos tangentes, Aproximações Lineares e Diferenciais

Planos tangentes

Suponha que uma superfície S tenha equação $z = f(x, y)$, onde f tenha derivadas parciais contínuas de primeira ordem, e seja $P(x_0, y_0, z_0)$ um ponto em S . Sejam C_1 e C_2 duas curvas em S passando por P , e T_1 e T_2 as retas tangentes às curvas C_1 e C_2 , respectivamente, no ponto P . Então, o **plano tangente** à superfície S no ponto P é definido como o plano que contém as retas T_1 e T_2 .

Se C é uma outra curva qualquer que esteja contida na superfície S e que passe pelo ponto P , então sua reta tangente no ponto P também pertence ao plano tangente. Portanto, podemos pensar no plano tangente a S em P como o plano que contém todas as retas tangentes a curvas contidas em S que passam pelo ponto P . O plano tangente em P é o plano que melhor aproxima a superfície S perto do ponto P .

Uma equação do plano tangente à superfície $z = f(x, y)$ no ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ é dada por:

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Exemplo: Determine o plano tangente ao parabolóide elíptico $z = 2x^2 + y^2$ no ponto $(1, 1, 3)$.

Solução:

Seja $f(x, y) = 2x^2 + y^2$. Então,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 4, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = 2$$

Logo, a equação do plano tangente em $(1, 1, 3)$ é:

$$\begin{aligned} z - 3 &= 4(x - 1) + 2(y - 1) \\ \Rightarrow z - 3 &= 4x - 4 + 2y - 2 \\ \Rightarrow z &= 4x + 2y - 3 \end{aligned}$$

Aproximações lineares

A equação do plano tangente ao gráfico de uma função f de duas variáveis que tem derivadas parciais contínuas em um ponto $(a, b, f(a, b))$ é

$$z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b).$$

A função linear cujo gráfico é esse plano tangente, a saber,

$$L(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$$

é denominada **linearização** de f em (a, b) , e a aproximação

$$f(x, y) \approx L(x, y)$$

é chamada de **aproximação linear** ou **aproximação pelo plano tangente** de f em (a, b) .

Exemplo: No exemplo anterior,

$$L(x, y) = 4x + 2y - 3$$

é uma boa aproximação para $f(x, y)$ quando (x, y) está próximo de $(1, 1)$. Por exemplo, no ponto $(1, 1; 0, 95)$, temos:

$$L(1, 1; 0, 95) = 4 \cdot (1, 1) + 2 \cdot (0, 95) - 3 = 4, 4 + 1, 9 - 3 = 3, 3$$

enquanto o valor real é:

$$f(1, 1; 0, 95) = 2 \cdot (1, 1)^2 + (0, 95)^2 = 2 \cdot 1, 21 + 0, 9025 = 2, 42 + 0, 9025 = 3, 3225$$

Se, entretanto, tomarmos um ponto longe de $(1, 1)$, a aproximação não será boa. Por exemplo, $L(2, 3) = 4(2) + 2(3) - 3 = 11$, ao passo que $f(2, 3) = 2(2^2) + 3^2 = 8 + 9 = 17$.

Pergunta: e se $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ não são contínuas?

Nesse caso, a aproximação linear não funciona (o plano tangente não existe), mesmo que as derivadas parciais existam.

Exemplo: Considere a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

É possível verificar que $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ (exercício), mas as derivadas parciais não são contínuas em $(0, 0)$. A aproximação linear seria $L(x, y) = 0$, mas $f(x, y) = \frac{1}{2}$ em todos os pontos da reta $y = x$ (com $x \neq 0$), o que mostra que a aproximação não é boa.

Para evitar esse comportamento, introduziremos a ideia de **função diferenciável** de duas variáveis.

Lembre-se: do Cálculo 1,

f é diferenciável em $x_0 \Leftrightarrow$ existe $a \in \mathbb{R}$, $a = f'(x_0)$, tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = a \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - ah}{|h|} = 0$$

Buscando generalizar isso, temos a seguinte definição:

Definição: Sejam $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, A aberto, e $(x_0, y_0) \in A$. Dizemos que f é **diferenciável** em (x_0, y_0) se, e somente se, existirem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que

$$\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - ah - bk}{\|(h, k)\|} = 0$$

Mais ainda, é possível provar que, $a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ e $b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$. Ou seja, a diferenciabilidade em um ponto implica a existência das derivadas parciais nesse ponto.

→ Essa definição nos diz que uma função diferenciável é aquela para a qual a aproximação linear $L(x, y)$ é uma boa aproximação quando (x, y) está próximo de (a, b) . Em outras palavras, o plano tangente aproxima bem o gráfico de f perto do ponto de tangência.

Usar essa definição para verificar a diferenciabilidade de uma função pode ser difícil, mas o próximo teorema fornece uma condição suficiente para isso:

Teorema: Se as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ existem perto do ponto (x_0, y_0) e são contínuas em (x_0, y_0) , então f é diferenciável em (x_0, y_0) .

Além disso, temos o seguinte:

Teorema: Se f for diferenciável em (x_0, y_0) , então f será contínua em (x_0, y_0) .

Exemplos:

- 1) Seja $f(x, y) = xe^{xy}$. Mostre que f é diferenciável em $(1, 0)$ e encontre sua linearização ali. Em seguida, use a linearização para aproximar $f(1, 1; -0, 1)$.

Solução:

Temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^{xy} + xye^{xy}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2e^{xy}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) = 1.$$

Como $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são funções contínuas em todo o $\mathbb{R}^2$, elas são contínuas em $(1, 0)$. Segue, pelo teorema, que f é diferenciável em $(1, 0)$.

A linearização é dada por:

$$\begin{aligned} L(x, y) &= f(1, 0) + \frac{\partial f}{\partial x}(1, 0)(x - 1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0)(y - 0) \\ &\Rightarrow L(x, y) = 1 + 1(x - 1) + 1(y) = 1 + x - 1 + y = x + y \end{aligned}$$

Assim, a aproximação $xe^{xy} \approx x + y$ perto de $(1, 0)$ é mais fácil de calcular.

Para $f(1, 1; -0, 1)$, temos a aproximação:

$$f(1, 1; -0, 1) \approx L(1, 1; -0, 1) = 1, 1 - 0, 1 = 1.$$

(Valor real: $f(1, 1; -0, 1) = 1, 1 \cdot e^{-0,11} \approx 0,98542$)

- 2) A função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy^2}{x^2 + y^4} & , \text{ se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & , \text{ se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

é diferenciável em $(0, 0)$?

Solução:

Note que f não é contínua em $(0, 0)$. Para verificar isso, testamos o limite por diferentes caminhos:

- Considerando a reta $x = t, y = t$:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t(t^2)}{t^2 + t^4} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t^3}{t^2(1 + t^2)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t}{1 + t^2} = 0$$

- Considerando a parábola $x = t^2, y = t$:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t^2, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2(t^2)t^2}{(t^2)^2 + t^4} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t^4}{t^4 + t^4} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t^4}{2t^4} = 1$$

Como os limites são diferentes, o limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ não existe. Portanto, f não é contínua em $(0, 0)$ e, conseqüentemente, não é diferenciável em $(0, 0)$.

Observe que f admite derivadas parciais em $(0, 0)$, mas não são contínuas.

O próximo exemplo mostra que a continuidade em um ponto não implica a diferenciabilidade nesse ponto.

3) Seja

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

a) f é contínua em $(0, 0)$?

b) f é diferenciável em $(0, 0)$?

Solução:

a) Como $0 \leq x^2 \leq x^2 + y^2$, temos $0 \leq \frac{x^2}{x^2 + y^2} \leq 1$. Então:

$$0 \leq \left| x \cdot \frac{x^2}{x^2 + y^2} \right| \leq |x|$$

Pelo Teorema do Confronto, como $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |x| = 0$, temos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$$

Logo, f é contínua em $(0, 0)$.

b) Verificaremos pela definição. Primeiro, calculamos as derivadas parciais em $(0, 0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3/h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0/k^2}{k} = 0$$

Agora, analisamos o limite da definição de diferenciabilidade:

$$E(h,k) = f(0+h, 0+k) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \cdot h - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \cdot k$$

$$E(h,k) = \frac{h^3}{h^2+k^2} - 1 \cdot h - 0 \cdot k = \frac{h^3 - h(h^2+k^2)}{h^2+k^2} = \frac{-hk^2}{h^2+k^2}$$

Devemos calcular:

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{-hk^2}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}} \quad (\otimes)$$

Testando o caminho $h = k$:

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{-k \cdot k^2}{(k^2+k^2)\sqrt{k^2+k^2}} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{-k^3}{2k^2\sqrt{2}k^2} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{-k^3}{2\sqrt{2}k^2|k|} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{-k}{2\sqrt{2}|k|}$$

Este último limite não existe (vale $-1/(2\sqrt{2})$ se $k > 0$ e $1/(2\sqrt{2})$ se $k < 0$).

Portanto, o limite em $(\otimes)$ não existe, e f não é diferenciável em $(0,0)$.

Diferenciais

Definição: Seja f uma função de duas variáveis e $z = f(x,y)$. Definimos a **diferencial** dz , também chamada de **diferencial total**, como

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Às vezes, usamos df no lugar de dz .

Se tomarmos $dx = \Delta x = x - x_0$ e $dy = \Delta y = y - y_0$, então a diferencial de f em (x_0, y_0) é:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

A aproximação linear pode ser escrita como:

$$f(x,y) \approx L(x,y) = f(x_0, y_0) + dz$$

Exemplos:

1) Seja $z = f(x,y) = x^2 + 3xy - y^2$.

a) Determine a diferencial dz .

b) Se x varia de 2 para 2,05 e y varia de 3 para 2,96, compare os valores de Δz e dz .

Solução:

a) Temos:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3y \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x - 2y$$

Assim,

$$dz = (2x + 3y)dx + (3x - 2y)dy$$

b) Tomando o ponto inicial $(x, y) = (2, 3)$, com as variações $dx = \Delta x = 2,05 - 2 = 0,05$ e $dy = \Delta y = 2,96 - 3 = -0,04$, obtemos:

$$dz = (2 \cdot 2 + 3 \cdot 3) \cdot (0,05) + (3 \cdot 2 - 2 \cdot 3) \cdot (-0,04)$$

$$dz = (4 + 9) \cdot (0,05) + (6 - 6) \cdot (-0,04) = 13 \cdot 0,05 = 0,65$$

Por outro lado, a variação real Δz é:

$$\begin{aligned} \Delta z &= f(2,05; 2,96) - f(2, 3) \\ &= [(2,05)^2 + 3(2,05)(2,96) - (2,96)^2] - [2^2 + 3(2)(3) - 3^2] \\ &= [4,2025 + 18,204 - 8,7616] - [4 + 18 - 9] \\ &= 13,6449 - 13 = 0,6449 \end{aligned}$$

Observe que $\Delta z \approx dz$, mas dz é mais simples de calcular.A diferença $dz - \Delta z$ é chamada de **erro** da aproximação.

- 2) Foram feitas as medidas do raio da base e da altura de um cone circular reto e obtivemos 10 cm e 25 cm, respectivamente, com um possível erro nessas medidas de, no máximo, 0,1 cm para cada uma. Utilize a diferencial para estimar o erro máximo propagado no cálculo do volume do cone.

Solução:

Vamos usar a diferencial para estimar o erro máximo cometido no cálculo do volume do cone.

O volume do cone com raio da base r e altura h é $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$. Logo, a diferencial de V é

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{\partial V}{\partial h} dh = \frac{2\pi r h}{3} dr + \frac{\pi r^2}{3} dh$$

Como o erro em cada medida é de, no máximo, 0,1, temos

$$|\Delta r| \leq 0,1 \quad \text{e} \quad |\Delta h| \leq 0,1.$$

Para estimar o maior erro no volume, tomamos $dr = 0,1$ e $dh = 0,1$, para $r = 10$ e $h = 25$. Logo,

$$dV = \frac{500\pi}{3} \cdot 0,1 + \frac{100\pi}{3} \cdot 0,1 = 20\pi$$

Portanto, o erro máximo cometido no cálculo do volume é de cerca de $20\pi \text{ cm}^3$.

Observação: Aproximações lineares, diferenciabilidade e diferenciais podem ser definidos de maneira análoga para funções de mais de duas variáveis.