7ª Lista de Exercícios
Cálculo Diferencial e Integra II - Curso: Engenharia Civil
Profª Liliam Carsava Merighe

Integrais Triplas

Faça os exercícios descritos abaixo. Esses exercícios foram retirados da seguinte referência: STEWART, J. Cálculo, v.2. 7 ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

Exercício 1 *Calcule a integral* $\iiint_E (xz - y^3)\ dV$, *onde* $E = \{(x, y, z) \mid -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 1\}$, *utilizando três ordens diferentes de integração.*

Exercício 2 *Calcule a integral iterada:*

a) $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{z^2} \int_0^{y-z} (2x - y)\ dxdydz$

b) $\displaystyle\int_1^2 \int_0^{2z} \int_0^{\ln x} x\, \mathrm{e}^{-y}\ dydxdz$

c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \int_0^{y} \int_0^{x} \cos(x + y + z)\ dzdxdy$

Exercício 3 *Calcule a integral tripla:*

a) $\iiint_E 2x\ dV$, *onde* $E = \{(x, y, z) \mid 0 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq \sqrt{4 - y^2}, 0 \leq z \leq y\}$.

b) $\iiint_E \mathrm{e}^{z/y}\ dV$, *onde* $E = \{(x, y, z) \mid 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq xy\}$.

c) $\iiint_E 6xy\ dV$, *onde* E *está abaixo do plano* $z = 1 + x + y$ *e acima da região do plano* xy *limitada pelas curvas* $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ *e* $x = 1$.

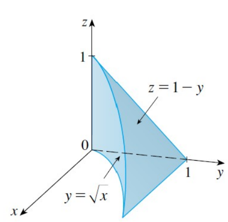
Exercício 4 *Use a integral tripla para determinar o volume do tetraedro limitado pelos planos coordenados e o plano* $2x + y + z = 4$.

Exercício 5 *Use a integral tripla para determinar o volume do sólido limitado pelos paraboloides* $y = x^2 + z^2$ *e* $y = 8 - x^2 - z^2$.

Exercício 6 *A figura mostra a região de integração da integral*

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \int_0^{1-y} f(x, y, z)\ dzdydx.$$

Reescreva essa integral como uma integral iterada equivalente nas cinco outras ordens.



Exercício 7 *Determine a massa e o centro de massa do cubo* E *dado por* $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$, $0 \leq z \leq a$, *com função densidade* $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

Exercício 8 *Encontre os momentos de inércia para um cubo de densidade constante* k, *com comprimento de lado* L, *se um vértice está localizado na origem e três arestas estão nos eixos coordenados.*

Exercício 9 *Marque o ponto cujas coordenadas cilíndricas são dadas. A seguir, encontre as coordenadas retangulares do ponto.*

(a) $(4, \pi/3, -2)$ ***(b)*** $(2, -\pi/2, 1)$

Exercício 10 *Mude de coordenadas retangulares para cilíndricas:*

(a) $(-1, 1, 1)$ ***(b)*** $(-2, 2\sqrt{3}, 3)$

Exercício 11 *Esboce o sólido descrito pelas desigualdades dadas em coordenadas cilíndricas:*

$$0 \leq r \leq 2, \quad -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2, \quad 0 \leq z \leq 1.$$

Exercício 12 *Uma casca cilíndrica tem 20 cm de comprimento, com raio interno 6 cm e raio externo 7 cm. Escreva desigualdades que descrevam a casca em um sistema de coordenadas adequado. Explique como você posicionou o sistema de coordenadas em relação à casca.*

Exercício 13 *Utilize coordenadas cilíndricas para fazer o que se pede em cada item:*

a) *Calcule* $\iiint_E \sqrt{x^2 + y^2}\, dV$, *onde* E *é a região que está dentro do cilindro* $x^2 + y^2 = 16$ *e entre os planos* $z = -5$ *e* $z = 4$.

b) *Calcule* $\iiint_E z\, dV$, *onde* E *é limitado pelo paraboloide* $z = x^2 + y^2$ *e o plano* $z = 4$.

c) *Determine o volume do sólido que está dentro tanto do cilindro* $x^2 + y^2 = 1$ *como da esfera* $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Exercício 14 *Calcule a integral, transformando para coordenadas cilíndricas:*

$$\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2} xz\, dzdxdy.$$

Exercício 15 *Marque o ponto cujas coordenadas esféricas são dadas. A seguir, encontre as coordenadas retangulares do ponto.*

(a) $(6, \pi/3, \pi/6)$ ***(b)*** $(3, \pi/2, 3\pi/4)$

Exercício 16 *Mude de coordenadas retangulares para esféricas.*

(a) $(0, -2, 0)$ ***(b)*** $(-1, 1, -\sqrt{2})$

Exercício 17 *Escreva a equação em coordenadas esféricas.*

(a) $z^2 = x^2 + y^2$ ***(b)*** $x^2 + z^2 = 9$

Exercício 18 ***a)*** *Determine desigualdades que descrevem uma bola oca com diâmetro de 30cm e espessura de 0,5cm. Explique como você posicionou o sistema de coordenadas.*

b) *Suponha que a bola seja cortada pela metade. Escreva desigualdades que descrevam uma das metades.*

Exercício 19 *Esboce o sólido cujo volume é dado pela integral a seguir e calcule-a:*

$$\int_0^{\pi/6}\int_0^{\pi/2}\int_0^3 \rho^2 \,\mathrm{sen}\phi \; d\rho d\theta d\phi.$$

Exercício 20 *Utilize coordenadas esféricas para calcular as seguintes integrais:*

a) $\iiint_B (x^2+y^2+z^2)^2 \; dV$, *onde* B *é a bola com centro na origem e raio* 5.

b) $\iiint_E (x^2+y^2) \; dV$, *onde* E *está entre as esferas* $x^2+y^2+z^2=4$ *e* $x^2+y^2+z^2=9$.

c) $\iiint_E xyz \; dV$, *onde* E *fica entre as esferas* $\rho = 2$ *e* $\rho = 4$ *e acima do cone* $\phi = \pi/3$.

Exercício 21 *Determine o volume do sólido* E *que está acima do cone* $z = \sqrt{x^2+y^2}$ *e abaixo da esfera* $x^2+y^2+z^2=1$.

Exercício 22 *Calcule a integral, transformando para coordenadas esféricas:*

$$\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} xy \; dzdydx.$$

Exercício 23 *Determine o jacobiano da transformação:*

a) $x = 5u - v$, $y = u + 3v$ ***b)*** $x = u/v$, $y = v/w$, $z = w/u$

Exercício 24 *Utilize a transformação dada para calcular a integral*

a) $\iint_R (x-3y) \; dA$, *onde* R *é a região triangular com vértices* $(0,0)$, $(2,1)$ *e* $(1,2)$; $x = 2u+v$, $y = u+2v$.

b) $\iint_R x^2 \; dA$, *onde* R *é a região limitada pela elipse* $9x^2+4y^2=36$; $x = 2u$, $y = 3v$.

Exercício 25 ***a)*** *Calcule* $\iiint_E dV$, *onde* E *é o sólido limitado pelo elipsoide* $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$. *Utilize a transformação* $x = au$, $y = bv$, $z = cw$.

b) *A Terra não é perfeitamente esférica; como resultado da rotação, os polos foram achatados. Assim, seu formato pode ser aproximado por um elipsoide com* $a = b = 6378km$ *e* $c = 6356km$. *Use o item (a) para estimar o volume da Terra.*

Exercício 26 *Calcule a integral, efetuando uma mudança de variáveis apropriada:* $\iint_R \frac{x-2y}{3x-y} \; dA$, *onde* R *é o paralelogramo limitado pelas retas* $x-2y=0$, $x-2y=4$, $3x-y=1$ *e* $3x-y=8$.