

Respostas - 7ª Lista de Exercícios
Cálculo Diferencial e Integra II - Curso: Engenharia Civil
Profª Liliam Carsava Merighe

Integrais Triplas

Exercício 1 *Ordem 1: $dz \, dy \, dx$*

$$\int_{-1}^1 \int_0^2 \int_0^1 (xz - y^3) \, dz dy dx = -8$$

Ordem 2: $dy \, dx \, dz$

$$\int_0^1 \int_{-1}^1 \int_0^2 (xz - y^3) \, dy dx dz = -8$$

Ordem 3: $dx \, dz \, dy$

$$\int_0^2 \int_0^1 \int_{-1}^1 (xz - y^3) \, dx dz dy = -8$$

O resultado é -8 para as três ordens.

Exercício 2 a) $\int_0^2 \int_0^{z^2} \int_0^{y-z} (2x - y) \, dx dy dz = \frac{16}{15}$

b) $\int_1^2 \int_0^{2z} \int_0^{\ln x} x e^{-y} \, dy dx dz = \frac{5}{3}$

c) $\int_0^{\pi/2} \int_0^y \int_0^x \cos(x + y + z) \, dz dx dy = -\frac{1}{3}$

Exercício 3 a) $\iiint_E 2x \, dV = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \int_0^y 2x \, dz dx dy = 4$

b) $\iiint_E e^{z/y} \, dV = \int_0^1 \int_y^1 \int_0^{xy} e^{z/y} \, dz dx dy = \frac{e}{2} - \frac{7}{6}$

c) $\iiint_E 6xy \, dV = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} \int_0^{1+x+y} 6xy \, dz dy dx = \frac{65}{28}$

Exercício 4 $V = \int_0^2 \int_0^{4-2x} \int_0^{4-2x-y} dz dy dx = \frac{16}{3}$

Exercício 5 $V = 16\pi$

Dica: use coordenadas polares no plano xz , onde $x = r \cos \theta$, $z = r \sin \theta$ e os limites são $0 \leq r \leq 2$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Exercício 6 1. *Ordem $dz \, dx \, dy$: A projeção no plano xy é $0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y^2$.*

$$\int_0^1 \int_0^{y^2} \int_0^{1-y} f(x, y, z) \, dz dx dy$$

2. *Ordem $dy \, dz \, dx$: A projeção no plano xz é $0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - \sqrt{x}$. Os limites para y são $\sqrt{x} \leq y \leq 1 - z$.*

$$\int_0^1 \int_0^{1-\sqrt{x}} \int_{\sqrt{x}}^{1-z} f(x, y, z) \, dy dz dx$$

3. Ordem $dy \, dx \, dz$: A projeção no plano xz é $0 \leq z \leq 1, 0 \leq x \leq (1-z)^2$. Os limites para y são $\sqrt{x} \leq y \leq 1-z$.

$$\int_0^1 \int_0^{(1-z)^2} \int_{\sqrt{x}}^{1-z} f(x, y, z) \, dy \, dx \, dz$$

4. Ordem $dx \, dz \, dy$: A projeção no plano yz é $0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1-y$. Os limites para x são $0 \leq x \leq y^2$.

$$\int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^{y^2} f(x, y, z) \, dx \, dz \, dy$$

5. Ordem $dx \, dy \, dz$: A projeção no plano yz é $0 \leq z \leq 1, 0 \leq y \leq 1-z$. Os limites para x são $0 \leq x \leq y^2$.

$$\int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{y^2} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

Exercício 7 Massa: $M = \iiint_E \rho(x, y, z) \, dV = \int_0^a \int_0^a \int_0^a (x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz = a^5$.

Centro de Massa: O centro de massa é $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Devido à simetria da região e da função densidade, $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z}$.

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \iiint_E x \rho(x, y, z) \, dV = \frac{1}{a^5} \int_0^a \int_0^a \int_0^a x(x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz = \frac{7a}{12}.$$

Logo, o centro de massa é $\left(\frac{7a}{12}, \frac{7a}{12}, \frac{7a}{12}\right)$

Exercício 8 O cubo é a região $E = [0, L] \times [0, L] \times [0, L]$. A densidade é $\rho(x, y, z) = k$.

Os momentos de inércia em relação aos eixos x, y, z são:

$$I_x = \iiint_E (y^2 + z^2) k \, dV, \quad I_y = \iiint_E (x^2 + z^2) k \, dV, \quad I_z = \iiint_E (x^2 + y^2) k \, dV$$

Portanto, $I_x = I_y = I_z = \frac{2}{3} k L^5 = \frac{2}{3} M L^2$, já que a massa total do cubo é $M = k \cdot (\text{Volume}) = k L^3$

Exercício 9 Dica: As fórmulas de conversão são $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = z$.

(a) As coordenadas retangulares são $(2, 2\sqrt{3}, -2)$.

(b) As coordenadas retangulares são $(0, -2, 1)$.

Exercício 10 Dica: As fórmulas de conversão são $r = \sqrt{x^2 + y^2}, \tan \theta = y/x, z = z$.

(a) As coordenadas cilíndricas são $(\sqrt{2}, 3\pi/4, 1)$.

(b) As coordenadas cilíndricas são $(4, 2\pi/3, 3)$.

Exercício 11 O sólido é a metade de um cilindro circular reto de raio 2 e altura 1, que se encontra na região $x \geq 0$.

Exercício 12 Posicionamos o sistema de coordenadas com o eixo z coincidindo com o eixo central da casca cilíndrica e a base da casca no plano xy ($z = 0$). Nesse sistema, a casca é descrita pelas seguintes desigualdades em coordenadas cilíndricas:

- **Raio r :** O raio varia entre o raio interno e o externo, então $6 \leq r \leq 7$.
- **Ângulo θ :** A casca é completa ao redor do eixo z , então $0 \leq \theta \leq 2\pi$.
- **Altura z :** O comprimento da casca é 20 cm, então $0 \leq z \leq 20$.

As desigualdades são: $6 \leq r \leq 7, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq 20$.

Exercício 13 a) $\iiint_E \sqrt{x^2 + y^2} dV = \int_0^{2\pi} \int_0^4 \int_{-5}^4 r \cdot r dz dr d\theta = 384\pi.$

b) $\iiint_E z dV = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{r^2}^4 z \cdot r dz dr d\theta = \frac{64\pi}{3}.$

c) $V = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} r dz dr d\theta = \frac{4\pi}{3}(8 - 3\sqrt{3}).$

Exercício 14 $\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 xz dz dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_r^2 (r \cos \theta) z \cdot r dz dr d\theta = 0$

Exercício 15 Dica: As fórmulas de conversão são $x = \rho \sin \phi \cos \theta, y = \rho \sin \phi \sin \theta, z = \rho \cos \phi.$

(a) As coordenadas retangulares são $(3/2, 3\sqrt{3}/2, 3\sqrt{3}).$

(b) As coordenadas retangulares são $(0, 3\sqrt{2}/2, -3\sqrt{2}/2).$

Exercício 16 Dica: As fórmulas de conversão são $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \operatorname{tg} \theta = y/x, \cos \phi = z/\rho.$

(a) As coordenadas esféricas são $(2, 3\pi/2, \pi/2).$

(b) As coordenadas esféricas são $(2, 3\pi/4, 3\pi/4).$

Exercício 17 (a) Em coordenadas esféricas, temos duas equações: $\phi = \pi/4$ e $\phi = 3\pi/4$, que descrevem dois cones.

(b) $\rho^2(\sin^2 \phi \cos^2 \theta + \cos^2 \phi) = 9.$

Exercício 18 a) Posicionamos a origem do sistema de coordenadas no centro da bola oca.

Em coordenadas esféricas, a bola oca é descrita por: $14,5 \leq \rho \leq 15, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi.$

b) As desigualdades para uma das metades (o hemisfério superior) são: $14,5 \leq \rho \leq 15, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi/2.$

Exercício 19 O sólido é uma fatia de uma esfera de raio 3, contida no primeiro octante e dentro de um cone de ângulo $\pi/6.$

A integral representa o volume desse sólido:

$$V = \int_0^{\pi/6} \int_0^{\pi/2} \int_0^3 \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi = \frac{9\pi}{4}(2 - \sqrt{3})$$

Exercício 20 a) $\iiint_B (x^2 + y^2 + z^2)^2 dV = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^5 \rho^4 \cdot \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi = \frac{312500\pi}{7}.$

b) $\iiint_E (x^2 + y^2) dV = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_2^3 (\rho^2 \sin^2 \phi) \cdot \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi = \frac{1688\pi}{15}.$

c) $\iiint_E xyz dV = \int_0^{\pi/3} \int_0^{2\pi} \int_2^4 (\rho^3 \sin^2 \phi \cos \phi \cos \theta \sin \theta) \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi = 0.$

Exercício 21 $V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^1 \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta = \frac{\pi}{3}(2 - \sqrt{2})$

Exercício 22

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} xy \, dz dy dx = \int_0^{\pi/4} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{2}} (\rho^2 \sin^2 \phi \cos \theta \sin \theta) \cdot \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi = \frac{4\sqrt{2}-5}{15}$$

Exercício 23 a) O Jacobiano é $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 16$

b) O Jacobiano é $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1/v & -u/v^2 & 0 \\ 0 & 1/w & -v/w^2 \\ -w/u^2 & 0 & 1/u \end{pmatrix} = 0$

Exercício 24 a) Jacobiano: $J = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 3$.

Integrando: $x - 3y = (2u + v) - 3(u + 2v) = -u - 5v$.

$$\iint_R (x - 3y) dA = \int_0^1 \int_0^{1-u} (-u - 5v) \cdot 3 \, dv du = -3$$

b) Jacobiano: $J = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 6$.

O integrando: $x^2 = (2u)^2 = 4u^2$.

$$\iint_R x^2 dA = 24 \iint_{u^2+v^2 \leq 1} u^2 du dv = 24 \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r \cos \theta)^2 \cdot r dr d\theta = 6\pi$$

Exercício 25 a) Com a transformação, o elipsoide se torna $(au)^2/a^2 + (bv)^2/b^2 + (cw)^2/c^2 = 1 \Rightarrow u^2 + v^2 + w^2 = 1$, que é a esfera unitária no espaço uvw .

O Jacobiano da transformação é $J = abc$.

$$\iiint_E dV = \iiint_B abc \, du dv dw = \frac{4}{3} \pi abc.$$

b) Usando a fórmula do item (a) com $a = 6378, b = 6378, c = 6356$:

$$V \approx 1.08321 \times 10^{12} \, km^3$$

Exercício 26 $\iint_R \frac{x-2y}{3x-y} dA = \int_1^8 \int_0^4 \frac{u}{v} \left| \frac{1}{5} \right| du dv = \frac{24}{5} \ln 2$.